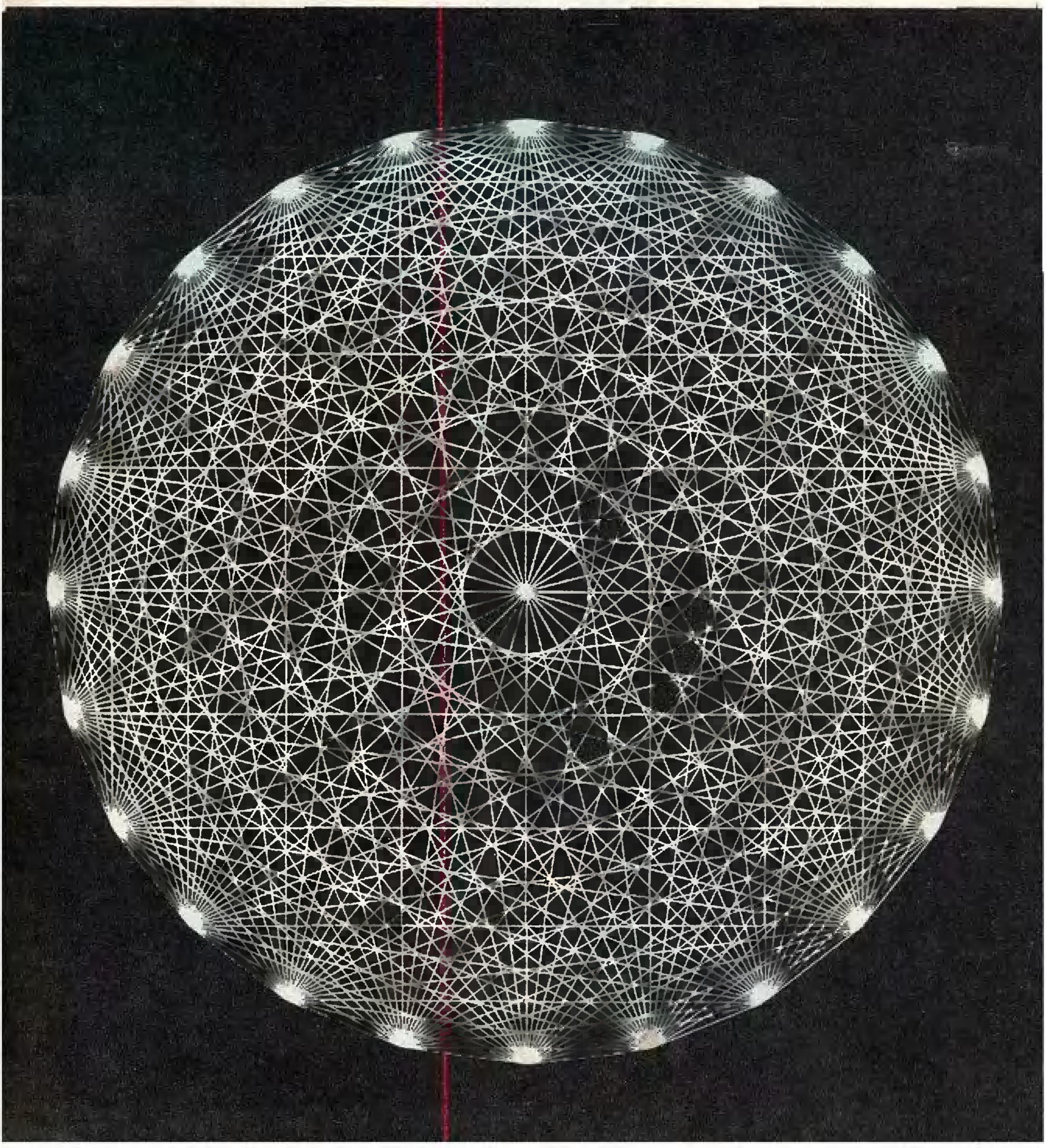
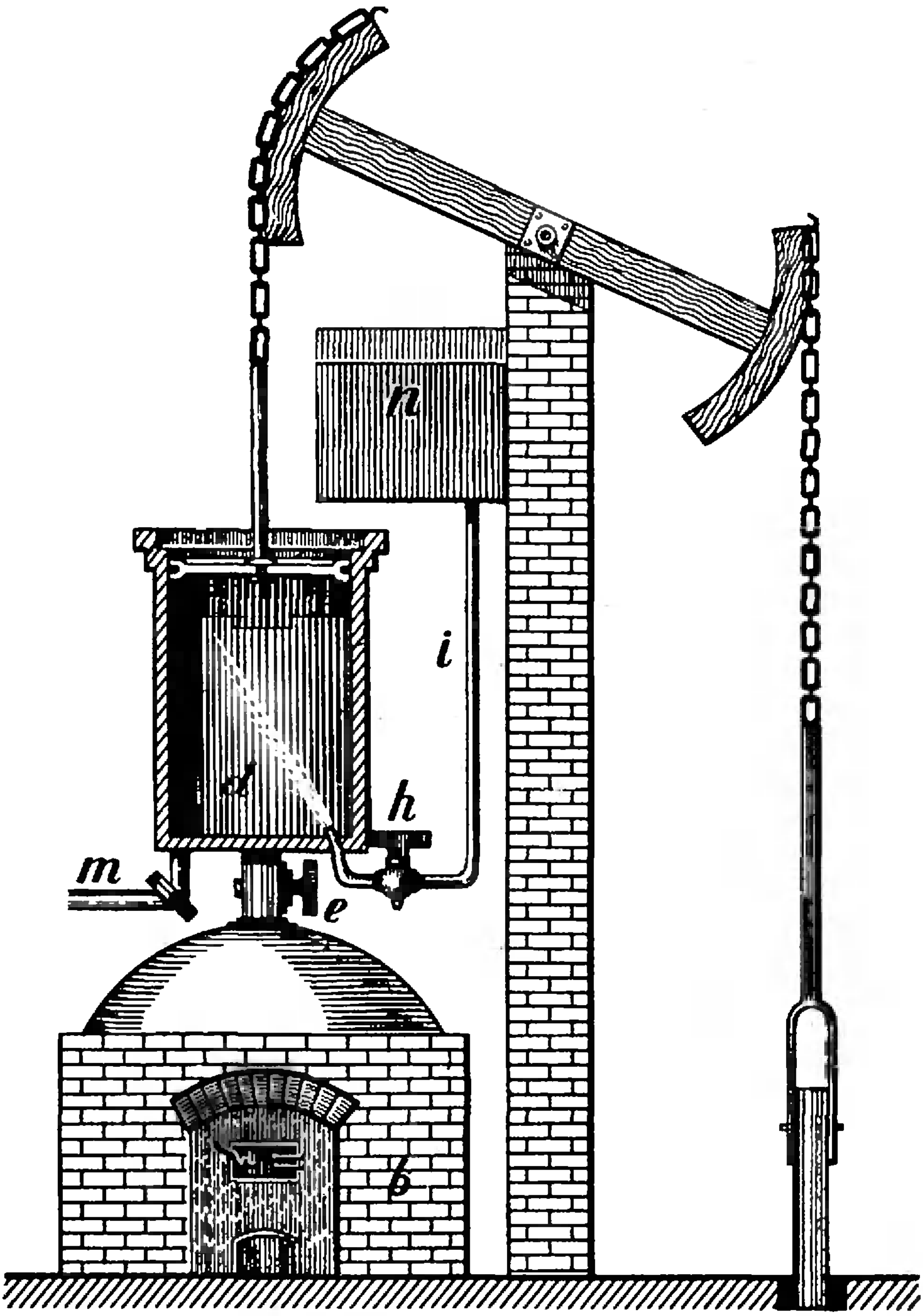
Квант

1973
12

Научно-популярный физико-математический журнал





«В начале XVIII столетия англичане Северн и Ньюкомен построили машину для выкачивания воды из каменноугольных копей. Она представлена на чертеже. В котле *b* образуется пар, который через трубку *e* переходит в цилиндр *d* и поднимает поршень; когда поршень доходит до верха, запирают кран *e*, открывают *h* и через трубку *i* вбрызгивают в цилиндр из резервуара *n* струю холодной воды, которая сгущает пары; внутри цилиндра делается пустота — поршень опускается от давления атмосферы; вода, образующаяся от сгущения пара и вбрызнутая из резервуара *n*, выпускается посредством трубки *m*. Таким образом, открывая и закрывая краны *e*, *h*, *m*, можно заставить поршень двигаться вверх и вниз. Поршень имеет стержень, который с помощью цепи соединен с коромыслом, имеющим точку опоры в средине. На другом конце коромысла тоже висит цепь, а к ней прикреплен стержень насоса, который выкачивает воду из каменноугольных копей.

Это описание одной из первых паровых машин приводилось в книге «Руководство физики», составленной А. Малининым и К. Бурениным. Седьмое издание этой книги для гимназий и реальных училищ вышло в свет в 1883 году.

О принципе действия тепловых машин рассказывается в этом номере нашего журнала в статье Ю. И. Соколовского (см. с. 12).

Основан в 1970 году

Квант

1973
12

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ

Георг Кантор (1845—1918)

Л. А. Калужнин

К 100-летию теории множеств Георга Кантора

Если вы захотите, чтобы дерево приносило больше плодов, чем обычно, вам нечего делать с его ветвями, а нужно взрыхлить землю и подложить новую почву под корни.

Френсис Бэкон

В конце XIX века для математического анализа — центральной области чистой и прикладной математики — стало необходимым уточнить смысл таких основных понятий, как ф у н к ц и я, н е п р е р ы в н о с т ь, с х о д и м о с т ь. Для этого нужно было строго определить, что такое действительное число и, более того, что такое натуральное число.

Этот комплекс вопросов был успешно решен, в первую очередь, немецкими математиками К. Вейерштрассом (1815—1897), Г. Кантором (1845—1918) и Р. Дедекиндом (1831—1916). Их труды заложили основы современного анализа.

Надо заметить, что общая обстановка, сложившаяся к тому времени, благоприятствовала развитию новых, плодотворных идей в науке.

В конце XIX — начале XX столетий происходит пересмотр старых представлений буквально во всех областях знания. При этом в недрах старых учений рождались новые представления.

Сейчас мы — свидетели научно-технической революции — уже не поражаемся таким проявлениям человеческого гения, как космонавтика, атомная энергетика или ЭВМ. Это кажется нам обыденным. И очень немногие представляют себе, какой огромный вклад внесли ученые прошлого в сокровищницу мировой науки.

Чтобы проследить путь развития современной науки и техники и иметь возможность предвидеть их дальнейшее развитие, нужно вернуться к истокам.

Крупнейшие фундаментальные достижения науки — такие, как открытие теории относительности или появление кибернетики, стали возможными не только благодаря увеличению объема научных знаний, но и в силу критического переосмысления самых основных и привычных понятий.

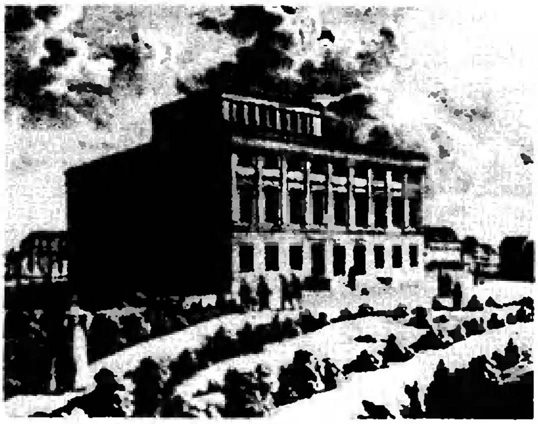
В математическом анализе основные определения также подверглись чрезвычайному обобщению, «... исследовались функции с самыми необыкновенными свойствами и аллюром... Это дало возможность говорить видным математикам о превращении или вырождении математического анализа в «клинику и патологию функций», ибо правильное течение функций стало редчайшим исключением» (Н. Н. Лузин). Под грозными ударами критики основ математического анализа началась перестройка всей математической науки.

В результате дальнейшего приведения в порядок основ анализа в конце XIX века возникла новая фунда-

*) Г. К а н т о р родился в Санкт-Петербурге в 1845 г. В Германии — с одиннадцати лет. В 1867 г. окончил Берлинский университет. Основной вклад Г. Кантора в науку состоит в создании теории множеств. Умер в 1918 г.

ментальная область математики — теория множеств. Ее становление проходило в обстановке резкой критики, особенно со стороны Л. Кронекера*). Критика была вызвана смелыми воззрениями Кантора, которые шли вразрез с многовековой традицией. Но это не могло помешать плодотворным применениям новой теории к многочисленным разделам математики. С начала XX века теория множеств стала базой всех математических дисциплин, а теперь ее методы и понятия постепенно проникают и в школьную математику. Исходные положения этой науки не более трудны, чем положения арифметики или элементарной алгебры и геометрии. Если они тем не менее не так широко известны, то это связано с тем, что теория множеств возникла сравнительно недавно — всего сто лет назад. Ее родоначальником был один из величайших математиков — Георг Кантор. Мы можем даже точно назвать «день рождения» этой науки — 7 декабря 1873 года. В этот день Кантору удалось доказать первое нетривиальное утверждение о бесконечных множествах — *«теорему о несчетности множества действительных чисел»*. Тем самым был открыт путь к построению новой большой математической дисциплины — учения о бесконечных множествах. О том, как это произошло, мы знаем из переписки Кантора с Дедекиндом. Нам кажется, что рассказ об этом с выдержками из писем Кантора представляет несомненный интерес для наших читателей.

В начале 70-х годов прошлого столетия молодой профессор старинного немецкого университета в Галле Георг Кантор задумался о сущности натуральных чисел, которыми мы пользуемся для счета предметов в каком-



Университет в Галле, в котором преподавал Кантор.

нибудь конечном множестве, и о том, нельзя ли и бесконечным множествам, например множеству всех точек плоскости или множеству всех целых чисел, приписывать некоторые «числа» неизвестной пока природы. Интерес к подобным вопросам возник у Кантора под влиянием его учителя, профессора Вейерштрасса. Мы уже говорили о том, что внимание крупнейших математиков было приковано к действительным числам. Это объясняется тем, что, в конечном счете, именно с недостаточно точным определением того, что такое действительное число, и были связаны трудности, возникавшие в анализе. Постепенно математики этой эпохи переходили ко все более простым понятиям: от действительных чисел к рациональным, целым и, наконец, к натуральным.

Можно считать, что натуральные числа не следует сводить к более простым понятиям. Такого мнения придерживаются некоторые математики и сейчас. Но многое говорит о том, что понятие натурального числа не является простейшим: есть более простые, более начальные понятия. Ребенок осваивает это понятие не сразу, а обучается ему постепенно. Из анализа языка хорошо известно, что обычные натуральные числа появились довольно поздно. Их «изобретение» сравнимо по своему значению только с изобретением письменности. В доисторические времена (анало-

*) Л. Кронекер (1823—1891) крупный немецкий ученый XIX века. Кронекер стремился всю математику получить из теории чисел. «Целые числа сотворил господь бог, а все прочее — дело людских рук»,— заявил он в 1886 г. на съезде в Берлине.

гичные явления можно наблюдать у некоторых племен и сегодня) люди знали лишь числа «1», «2», иногда еще «3», а дальше шло «много», «тьма». И все-таки, не умея считать, люди могли ответить на вопрос, в каком из двух множеств больше элементов. Разумеется, в этом случае сравнивались множества конкретных элементов: поголовье скота, размеры войск и другие. Сейчас этот метод сравнения множеств называется установлением взаимно однозначного соответствия. Вот в чем он заключается.

Пусть мы имеем два конечных множества M_1 и M_2. Элементы первого множества обозначим условно собачками, а второго — кошками. Для сравнения этих множеств поступают так: извлекают по одному элементу из каждого множества и сопоставляют их друг с другом, образуя пары (см. рисунок).

Если собачки и кошки кончаются одновременно, то говорят, что между множествами M_1 и M_2 установлено взаимно однозначное соответствие и что эти множества содержат одинаковое число элементов (что они равночисленны или эквивалентны). Легко представить себе другую ситуацию: некоторые элементы множества M_1 остались без напарника. Тогда следует считать, что множество M_1 содержит больше элементов, чем множество M_2. Очевидно, что описанная процедура сравнения конечных множеств не нуждается в понятии «натуральное число». Наоборот, понятие взаимно однозначного соответствия, по-видимому, является более простым, и можно определить понятие «натуральное число» исходя из него.

Математики и логики прошлого столетия (Г. Фреге, Б. Рассел и другие) предлагали делать это на основе, примерно, следующих рассуждений.

Разобьем все конечные множества на классы таким образом, что в каждый класс входят те и только те множества, которые эквивалентны между собой, вне зависимости от природы элементов образующих данное множество. Тогда то общее свойство, которое характеризует все конечные множества из какого-либо класса, и определяется как число элементов в множествах этого класса. Так, например, 5 — это то общее свойство, которым обладают все конечные множества, эквивалентные множеству пальцев моей правой руки. Из вышеизложенного ясно, как сравнивать определенные таким образом числа «по величине». Пусть m_1 и m_2 — два натуральных числа, а M_1 и M_2 — два множества, характеристиками которых являются эти числа. Если M_1 и M_2 неэквивалентны и имеется взаимно однозначное соответствие между M_1 и некоторой частью множества M_2, то $m_1 < m_2$. Таким образом мы определили понятие «натуральное число» и свойства этих чисел ($n_1 = n_2$; $n_1 < n_2$; $n_1 > n_2$).

Но ведь при таком способе сравнения совсем не обязательно предполагать, что множества M_1 и M_2 конечные. Поэтому у Кантора возникла

мысль, что таким же образом можно разбить на классы и все бесконечные множества.

Все множества, входящие в один класс, то есть имеющие одну и ту же мощность, называются равномощными.

Тогда всем множествам, входящим в один класс, соответствует определенное число, которое называется кардинальным числом или мощностью.

Отсюда ясно, что мощность — это обобщение понятия натурального числа.

Простейшим примером бесконечного множества является множество N всех натуральных чисел. Поэтому Кантор стал сравнивать различные бесконечные множества с множеством N. Очень скоро выяснилось, что для многих бесконечных множеств довольно просто устанавливается взаимно однозначное соответствие с этим множеством. Рассмотрим, например, N_2 — множество всех положительных четных чисел. Несмотря на то, что N_2 является частью N, между N_2 и N можно установить взаимно однозначное соответствие: числу $2n$, входящему в множество N_2, сопоставим число n, входящее в множество N_1. Ясно, что такое соответствие будет взаимно однозначным. На первых порах казалось парадоксальной возможность установить взаимно однозначное соответствие между множеством и его частью: ведь для конечных множеств такая ситуация невозможна. Но споры по этому поводу прекратились довольно скоро — было установлено, что для бесконечного множества A всегда можно указать такое его подмножество B, что между A и B можно установить взаимно однозначное соответствие. Дедекинд даже предложил считать это определением бесконечного множества.

Еще большее удивление вызывает то, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех положительных рациональных чисел и множеством N. Тем не менее указать такое соответствие не так уж трудно. Постарайтесь сделать это самостоятельно *).

Естественно возникает вопрос: существуют ли бесконечные множества, для которых взаимно однозначное соответствие с N невозможно?

Если бы таких множеств не оказалось, то тем самым все бесконечные множества были ли бы равномощными, и понятие кардинального числа (для бесконечных множеств) потеряло бы всякий смысл—оно было бы одним и тем же для всех бесконечных множеств.

В начале 70-х годов прошлого века Кантор заподозрил, что бесконечным множеством, не равномощным множеству N натуральных чисел, является множество R всех действительных чисел (или даже множество всех действительных чисел какого-либо отрезка — скажем, множество всех чисел отрезка $[0, 1]$). Но как это можно доказать? Ведь во всех рассмотренных выше случаях доказательство состояло в нахождении некоторого вполне определенного взаимно однозначного отображения. В данном же случае требуется установить, что построение подобного отображения невозможно. Утверждения такого рода называются «теоремами невозможности», и их доказательство обычно требует совершенно новых оригинальных идей (пример этому — доказательство невозможности квадратуры круга и трисекции угла, или доказательство невозможности решения алгебраических уравнений степени больше чем четыре с помощью операций сложения, умножения, вычитания, деления и извлечения корней разных степеней). О работе Кантора над доказательством неравномощности множества действительных чисел и множества N натуральных чисел довольно подробно известно из его переписки с Дедекиндом. Вот некоторые выдержки из этой переписки:

---

*) Если вам это не удастся, прочтите статью «Каких чисел больше?» (с. 26). Приведенные в ней указания помогут вам справиться с этой задачей.

«Галле, 29 ноября 1873 г.

... Разрешите обратиться к Вам с вопросом, представляющим для меня некоторый теоретический интерес, но на который я не могу найти ответа. Может быть, Вы это можете и будете так любезны мне об этом написать. Речь идет о следующем.

Рассмотрим совокупность всех положительных целочисленных объектов и обозначим ее через (n). Кроме того, рассмотрим, скажем, совокупность всех положительных действительных числовых величин и обозначим ее через (x). Вопрос состоит просто в том, возможно ли так поставить в соответствие (n) и (x), что каждому индивидууму одной совокупности будет отвечать один и только один индивидуум другой.

С первого взгляда кажется, что нет — это невозможно, так как (n) состоит из дискретных частей, а (x) образует континуум. Но таким аргументом ничего не выигрывается, и как бы я ни склонялся к мнению, что (n) и (x) не допускают однозначного соответствия, причину этого я найти не могу, а именно это мне и нужно. Возможно, что причина совсем простая.

Разве на первый взгляд не склоняешься к мнению, что (n) не допускает однозначного соответствия с совокупностью (p/q) всех положительных рациональных чисел и тем не менее совсем не трудно показать...» (что это так. — *Л. К.*).

29 ноября 1873 г. в дневнике Дедекинда, где он отмечал содержание полученных им писем на научные темы и свои мысли по их поводу, появляется следующая запись: «... Я ему незамедлительно ответил, что я не могу решить его первый вопрос, но одновременно высказал и полностью доказал теорему, что даже совокупность всех алгебраических чисел может быть указанным образом сопоставлена совокупности (n) натуральных чисел...».

А вот письмо от 2 декабря.

«... Я был очень рад получить сегодня Ваш ответ на мое последнее послание. Мой вопрос я Вам поставил по той причине, что уже годы, как я в сомнении, являются ли возникшие передо мной трудности трудностями чисто субъективного характера или же они связаны с существом дела. Так как Вы мне пишете, что и Вы не в состоянии на него ответить, то я могу считать, что верно последнее...».

И, наконец, письмо от 7 декабря 1873 г.

«... В последние дни у меня было время более интенсивно продумать высказанную мною гипотезу; только сегодня, как мне кажется, я смог довести дело до конца. Если я ошибаюсь, то, несомненно, я не встречу более снисходительного критика, чем Вы. Я осмеливаюсь предложить Вашему приговору то, что я успел записать на бумаге со всеми несовершенствами первой мысли...».

Затем следует доказательство несчетности множества действительных чисел из интервала $[0, 1]$. Оно длинно и сложно — редко самые первые доказательства какого-либо утверждения оказываются самыми простыми. Мы не будем его здесь приводить. Уже 9 декабря Кантор предлагает более простое доказательство, а Дедекинд в свою очередь находит дальнейшие упрощения.

Вскоре возникло доказательство, известное как «диагональный метод Кантора», которым пользуются и в настоящее время. Приведем это доказательство.

Заметим, что каждое действительное число ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, можно записать как бесконечную десятичную дробь вида $0, a_1, a_2 \ldots$, где a_i, $i = 1, 2, \ldots$, — какие-либо цифры — знаки 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9. Представление всех чисел в подобном виде однозначно, исключение здесь представляет лишь тот случай, когда в записи числа, начиная с некоторого k, все a_i равны 0. Такие числа могут быть записаны также и по-другому: нужно заменить все a_i, начиная с того же разряда k, цифрами 9 и уменьшить предшествующую им цифру на 1 — так, например, число 0,3500... можно записать и в виде 0,34999... Других возможностей разного представления числа в виде бесконечных десятичных дробей нет. Условимся (для определенности), что, если возможны две записи числа, мы будем выбирать ту из них, которая оканчивается девятками.

Предположим теперь, что удалось установить взаимно однозначное соответствие между всеми действительными числами, лежащими между 0 и 1 и всеми натуральными числами, так что мы можем выписать все эти действительные числа в бесконечную последовательность

$$1 \leftrightarrow 0,\ a_1^1\ a_2^1\ a_3^1\ldots$$
$$2 \leftrightarrow 0,\ a_1^2\ a_2^2\ a_3^2\ldots$$
$$\ldots$$
$$p \leftrightarrow 0,\ a_1^p\ a_2^p\ a_3^p\ldots$$

Покажем, что такая последовательность не может содержать всех действительных чисел. Для этого построим такое число $b = 0,\ b_1,\ b_2\ldots$, что $b_i \neq a_i^i$ для всех i. Мы определим это число так:

$$b_i = 5, \text{ если } a_i^i \neq 5,$$
$$b_i = 9, \text{ если } a_i^i = 5.$$

Число b не может встретиться в выписанной выше последовательности. Ведь в противном случае оно должно было бы занимать некоторое (скажем, n-е) место. Но от n-го числа число b отличается по построению в n-м разряде. Итак, предполагаемый пересчет всех действительных чисел невозможен, и, следовательно, множество N и множество действительных чисел R неравномощны.

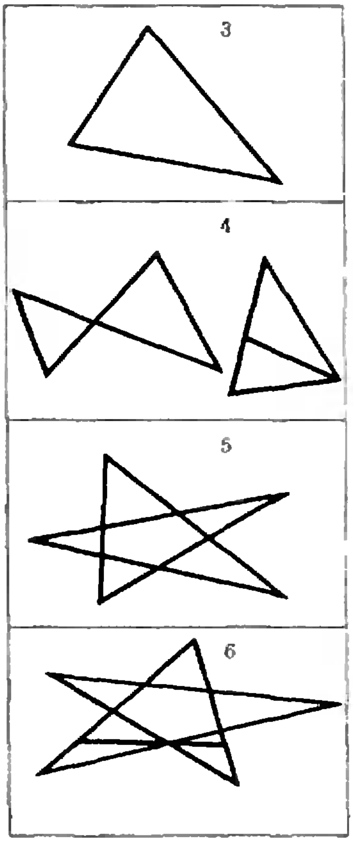
Так впервые было доказано, что и среди бесконечных множеств имеются неравномощные.

Вскоре Кантором было установлено, что можно указать сколь угодно много попарно неэквивалентных бесконечных множеств, так что сама совокупность бесконечных кардинальных чисел оказывается неограниченной, и в 70—80-х годах прошлого столетия — в основном Кантором — была построена новая математическая наука — теория множеств.

Сколько треугольников?

Вот задача, которая легко формулируется, но общее решение которой до сих пор не найдено

Требуется определить, *какое максимальное число непересекающихся треугольников можно получить в результате пересечения n прямых линий.*



Для $n = 3$, 4, 5 и 6 можно, перебирая все возможные варианты, получить соответственно 1, 2, 5 и 7 треугольников (см. рисунок). Попробуйте найти максимальное число треугольников для $n = 7$ и 8. Это будет посложнее. А может, вам посчастливится найти формулу количества таких треугольников для общего случая пересечения n прямых линий?

Д. Б. Фукс
М. Б. Фукс

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ

Мы начнем статью с определений.

Алгебраическими называют числа, являющиеся корнями многочленов с целыми коэффициентами. Числа, не являющиеся алгебраическими, называют *трансцендентными*.

Далеко не все числа являются алгебраическими. Обычно этот факт доказывают так. Множество алгебраических чисел *счетно*, потому что счетно множество многочленов с целыми коэффициентами и каждый такой многочлен имеет конечное число корней; множество же всех действительных чисел *несчетно* *).

Это доказательство интересно тем, что оно не просто устанавливает существование трансцендентных чисел, но и показывает, что их в определенном смысле б о л ь ш е, чем алгебраических. Но оно обладает и важным дефектом: оно н е э ф ф е к т и в н о, то есть не содержит построения какого-либо заведомо не алгебраического числа. Правда, примеры трансцендентных чисел всем известны: π и e. Но доказать трансцендентность этих чисел совсем не просто. И, вообще, доказательство трансцендентности конкретного числа часто оказывается очень сложным. Например, в одной из знаменитых проблем Г и л ь б е р т а предлагалось доказать трансцендентность числа $2^{\sqrt{2}}$. Эта проблема долго не поддавалась усилиям ученых и была спустя много лет решена советским математиком А. О. Г е л ь ф о н д о м.

В этой статье мы укажем один из способов построения трансцендентных чисел (с доказательством их трансцендентности). Основным инструментом нам послужит теория рациональных приближений. В наших статьях о рациональных приближениях («Квант», №№ 6 и 11 за 1971 год; сразу оговоримся, что знать содержание упомянутых статей для чтения этой не обязательно) было показано, что хуже всего приближаются рациональными числами такие «благополучные» алгебраические числа, как $\sqrt{2}$, $(\sqrt{5}+1)/2$ и т. п. Мы дадим аккуратное определение «хорошо приближаемого» иррационального числа и докажем, что все иррациональные числа, хорошо приближаемые рациональными, трансцендентны. Это позволит нам построить сколько угодно примеров трансцендентных чисел.

О п р е д е л е н и е. Иррациональное число α называется *хорошо приближаемым*, если для любых положительных N, n найдется такая дробь p/q, что $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{Nq^n}$.

Легко построить сколько угодно хорошо приближаемых чисел. Пусть, например,

$$\alpha = 0{,}\underbrace{10\ldots0}_{m_1-1}\underbrace{10\ldots0}_{m_2-1}\underbrace{10\ldots0}_{m_3-1}10\ldots,$$

*) О том, какие множества называются *счетными*, а какие *несчетными*, рассказано в статье: Ю. П. Л ы с о в, Каких чисел больше?, с. 26. Доказательство несчетности множества действительных чисел приведено на с. 8.

где $m_1, m_2, m_3, \ldots$ — некоторая возрастающая последовательность, составленная из целых чисел, больших 1. Положим

$$\alpha_k = 0,\underbrace{10\ldots0}_{m_1-1}\underbrace{10\ldots0}_{m_2-1}1\ldots\underbrace{10\ldots0}_{m_k-1}1.$$

Очевидно, α_k — рациональное число со знаменателем

$$q_k = 10^{m_1+\ldots+m_k+1}$$

и что

$$|\alpha - \alpha_k| = \alpha - \alpha_k = 0,\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{m_1+\ldots+m_k+m_{k+1}}10\ldots < 2\times$$
$$\times\cdot 10^{-m_1-\ldots-m_k-m_{k+1}} < 10^{-m_{k+1}}.$$

Предположим теперь, что последовательность $m_1, m_2, m_3 \ldots$ настолько быстро возрастает, что $m_{k+1} \geqslant k(m_1 + \ldots + m_k + 2)$ при любом k. (Такова, например, последовательность $1^1, 2^2, 3^3, 4^4, \ldots$ — докажите!) Тогда при любом k

$$\frac{1}{kq_k^k} = \frac{10^{-k(m_1+\ldots+m_k+1)}}{k} >$$
$$> 10^{-k}10^{-k(m_1+\ldots+m_k+1)} =$$
$$= 10^{-k(m_1+\ldots+m_k+2)} \geqslant 10^{-m_{k+1}} >$$
$$> |\alpha - \alpha_k|,$$

и потому если n, N — любые положительные числа и $k > n$, $k > N$, то

$$|\alpha - \alpha_k| < \frac{1}{kq_k^k} < \frac{1}{Nq_k^n}.$$

Таким образом, α — хорошо приближаемое число.

Докажем теперь следующую теорему.

Т е о р е м а *). *Хорошо приближаемое иррациональное число не может быть алгебраическим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем иррациональное алгебраическое число α и покажем, что оно не является хорошо приближаемым. Поскольку α алгебраично, существует многочлен

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

с целыми коэффициентами такой, что $P(\alpha) = 0$.

Будем считать, что $P(x)$ не имеет рациональных корней. Действительно, если $P(x)$ имеет рациональный корень, скажем, a, то $P(x)$ делится без остатка на $(x - a)$. Частное, очевидно, имеет рациональные коэффициенты, так что, умножая его на надлежащее целое число, мы получим многочлен с целыми коэффициентами, для которого α по-прежнему является корнем и у которого степень на единицу меньше, чем у исходного многочлена. Повторяя эту операцию, мы получим многочлен с целыми коэффициентами и с корнем α, уже не имеющий рациональных корней.

Обозначим через A наибольшее из чисел $|a_0|, |a_1| \ldots |a_n|$ и положим $B = |\alpha| + 1$, $N = n^2AB^{n-1}$.

Покажем теперь, что, какова бы ни была дробь p/q, имеет место неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{Nq^n}, \qquad (*)$$

из чего и будет следовать, что число α не является хорошо приближаемым.

Пусть p/q — любая дробь. Если $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > 1$, то неравенство (*), очевидно, выполнено, так что мы можем ограничиться случаем, когда $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant 1$. В частности (и это очень важно), $\left|\frac{p}{q}\right| \leqslant |\alpha| + 1 = B$.

Из сказанного выше следует, что

$$P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0.$$

Так как

$$q^n\left[a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_n\right]$$

*) Эту теорему доказал известный французский математик Ж о з е ф Л и у в и л л ь (1809—1882).

есть целое число, отличное от нуля, то

$$\left|q^n\left[a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_n\right]\right| \geqslant 1$$

и, значит,

$$\left|a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_n\right| \geqslant \frac{1}{q^n}.$$

С другой стороны, принимая во внимание, что

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

мы получаем, что

$$\left|a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_n\right| = \left|a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_n - (a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n)\right| \leqslant |a_0|\left|\left(\frac{p}{q}\right)^n - \alpha^n\right| + |a_1|\left|\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} - \alpha^{n-1}\right| + \ldots + |a_{n-1}|\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \leqslant A\left|\left(\frac{p}{q}\right)^n - \alpha^n\right| + A\left|\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} - \alpha^{n-1}\right| + \ldots + A\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| = A\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \times$$

$$\times \left\{\left|\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}\alpha + \ldots + \frac{p}{q}\alpha^{n-2} + \alpha^{n-1}\right| + \left|\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \left(\frac{p}{q}\right)^{n-3}\alpha + \ldots + \frac{p}{q}\alpha^{n-3} + \alpha^{n-2}\right| + \ldots + \left|\frac{p}{q} + \alpha\right| + 1\right\} \leqslant A\left|\frac{p}{q} - \alpha\right|\left\{nB^{n-1} + (n-1)B^{n-2} + \ldots + 2B + 1\right\} \leqslant A\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| n\cdot nB^{n-1} = n^2AB^{n-1}\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| = N\left|\frac{p}{q} - \alpha\right|.$$

(Мы воспользовались тем, что и $|\alpha|$, и $\left|\frac{p}{q}\right|$ меньше B).

Значит, $N\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \geqslant \frac{1}{q^n}$, то есть $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{1}{Nq^n}$. Теорема доказана.

Таким образом, все хорошо приближаемые числа (включая и указанное ранее число α) являются трансцендентными.

В заключение заметим, что доказанная теорема далеко не полностью отражает связь между алгебраичностью чисел и качеством их рациональных приближений. Дальнейшее развитие этих методов позволяет доказывать трансцендентность самых разных чисел (кстати, и трансцендентность числа e обычно доказывается в этом же круге идей). Следует сказать, что исследовательская работа в этом направлении ведется и поныне. Один из наиболее ярких результатов последних лет в этой области — работа английского математика Рота, удостоенная медали на международном математическом конгрессе в Эдинбурге в 1958 году.

Теорема, доказанная Ротом, утверждает, что *если α — алгебраическое число, то существует лишь конечное число таких дробей p/q, что $\left|\alpha - \frac{p}{p}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$, где $\varepsilon > 0$ — любое наперед заданное число.* Поэтому наша теорема о хорошо приближаемых числах осталась бы верной, если бы в определении хорошо приближаемого числа мы потребовали бы существование дроби $\frac{p}{q}$ с $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq^n}$ не для любых положительных n и N, а только для одного какого-нибудь n, строго большего двух.

Кстати, отбросить ε в теореме Рота нельзя. Это следует из теоремы Гурвица — Бореля, доказанной в нашей статье «О наилучших приближениях» (см. «Квант» № 11 за 1971 год).

Ю.И.Соколовский

ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ

Современная жизнь и современное производство немыслимы без машин. А чтобы приводить в движение машины, нужны двигатели, задача которых — поставлять необходимую машинам энергию.

Земная кора и вода океанов обладают огромными запасами внутренней энергии. Но эту энергию нельзя непосредственно использовать для приведения машин в движение,— она переходит к другим телам лишь способом теплопередачи.

Понятно поэтому, что нужно устройство, которое, получая энергию в процессе теплопередачи, передавало бы ее другим телам (в частности, машинам), совершая работу. Чтобы это устройство могло действовать неограниченно долго (а не до исчерпания каких-то своих внутренних ресурсов), оно должно работать циклически, периодически возвращаясь к одному и тому же состоянию. Такое устройство существует и называется тепловым двигателем. Короче говоря, тепловой двигатель преобразует подводимую к нему теплоту в работу. *Схематически это можно представить* так, как на рисунке 1.

Заметим, что противоположная задача — отдавать в форме теплоты энергию, получаемую в процессе механической работы,— решается совсем просто. Годится своего рода «мельница», работающая вхолостую (рис. 2): за рукоятку P вращают жернов A, который трется о другой, неподвижный, жернов $Б$, так что оба они греются. Вначале за счет совершаемой внешними силами работы прогревается сама мельница — растет ее внутренняя энергия, а с ней и температура. Этот этап длится до тех пор, пока энергия, передаваемая мельницей окружающим телам в виде тепла, не сравняется с затрачиваемой механической энергией. После этого наступает динамическое равновесие, процесс становится стационарным (стационарный процесс можно считать циклическим). Таким образом, мельница становится «механической печкой», то есть прямой противоположностью тепловому двигателю.

Такого рода устройство было известно нашим далеким предкам, которые умели добывать огонь трением. Придумать тепловой двигатель было

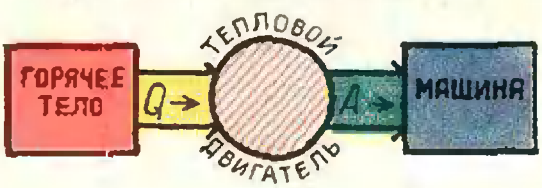


Рис. 1.

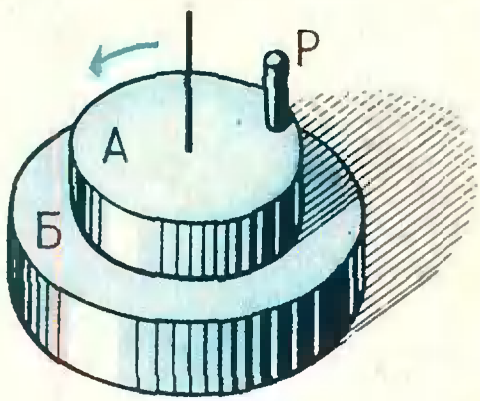


Рис. 2.

значительно труднее. В основу его можно положить различные принципы. Но чаще всего используется то обстоятельство, что внутренняя энергия идеального газа (то есть, в сущности, кинетическая энергия хаотического движения его молекул) при определенных условиях внешне проявляет себя как потенциальная энергия упругой деформации: газ, сжатый в цилиндре поршнем, вполне аналогичен сжатой пружине, он может совершить работу (когда шла речь о невозможности *непосредственного* получения работы за счет внутренней энергии, имелись в виду только твердые и жидкие тела).

Попробуем мысленно сконструировать простейший тепловой двигатель, рабочим телом которого является идеальный газ. Пусть сжатый газ находится в цилиндре под поршнем (рис. 3). Если поршень имеет возможность двигаться, газ расширяется и совершает работу.

Когда газ теплоизолирован (то есть окружен теплонепроницаемой оболочкой), он при адиабатическом расширении остывает, и за счет его внутренней энергии совершается работа ($A = -\Delta U$). Но если стенки цилиндра достаточно хорошо проводят теплоту, а сам цилиндр находится в термостате, то температура, а значит и внутренняя энергия газа, поддерживается постоянной — работа совершается за счет подводимой теплоты ($A_1 = q_1$). Здесь уже налицо превращение теплоты в работу, но это еще не тепловой двигатель, так как в его работе нет цикличности.

Чтобы возвратить газ в начальное состояние, его необходимо сжать. Но это потребует затраты как раз такой же работы A_1, какая была получена при расширении, и приведет к возвращению в термостат полученной ранее от него теплоты q_1. Чтобы этого избежать, газ следует перед сжатием охладить. При одном и том же объеме давление холодного газа ниже; так что процесс сжатия потребует меньшей работы ($A_2 < A_1$) и в термостат вернется меньшее количество теплоты $q_2 = A_2$. Для охлаждения газа устанавливается тепловой контакт между цилиндром и вторым термостатом с более низкой температурой. Сжав газ до исходного объема, снова восстанавливают контакт цилиндра с первым термостатом.

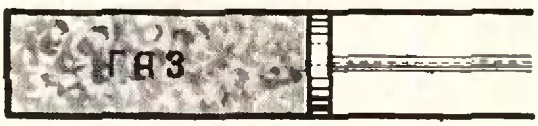


Рис. 3.

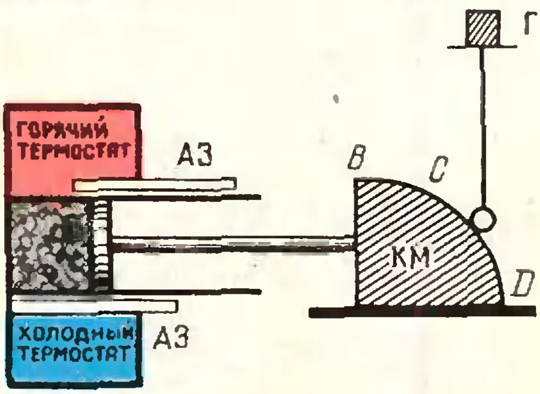


Рис. 4.

Один из простейших тепловых двигателей

Одна из возможных схем двигателя представлена на рисунке 4.

АЗ — адиабатические (теплонепроницаемые) заслонки, передвигая которые прерывают или устанавливают тепловой контакт между термостатами и цилиндром. *КМ* — кулачковый механизм, при помощи которого горизонтальное перемещение поршня преобразуется в подъем груза *Г*. Профиль кулачка (линия *BCD*) выбирается таким, чтобы при любом положении поршня действующие на кулачок с обеих сторон силы были почти уравновешены (используется эффект наклонной плоскости). Благодаря этому процесс расширения газа будет квазистатическим, то есть представляющим собой последовательность почти равновесных состоя-

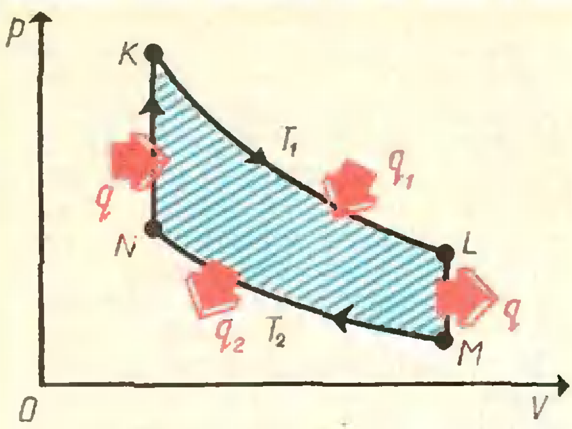


Рис. 5.

ний. Только в равновесном состоянии газ подчиняется уравнению Менделеева — Клапейрона. В верхней точке подъема часть груза снимается, что опять обеспечивает приблизительное равновесие поршня в процессе сжатия при более низкой температуре (а значит, и меньшем давлении).

Происходящие в двигателе процессы графически изображены на диаграмме в координатах p, V (рис. 5). Точка K — исходное состояние газа. Изотерма KL — расширение газа при постоянной (сравнительно высокой) температуре T_1 в контакте с «горячим» термостатом. Изохора LM — постепенное остывание газа в контакте с «холодным» термостатом до температуры T_2 (постепенность, а значит, квазистационарность процесса в газе обеспечивается плохой теплопроводностью цилиндра). Изотерма MN — сжатие газа при сравнительно низкой температуре T_2. Изохора NK — нагревание газа от температуры T_2 до T_1 при тепловом контакте с горячим термостатом.

Работа совершается только на участках KL (A_1) и MN (A_2). Величина работы, совершаемой за весь цикл $A = A_1 - A_2$, численно равна площади, ограниченной контуром цикла. Теплота подводится к газу от «горячего» термостата во время расширения на участке KL (q_1) и при нагревании на участке NK (q). Теплота отдается газом холодному термостату при охлаждении на участке LM (количество этой теплоты равно q и соответствует *разности внутренних энергий газа* при температурах T_1 и T_2) и при сжатии на участке MN (q_2). Всего за цикл горячий термостат отдает теплоту $Q_1 = q_1 + q$, а холодный термостат получает теплоту $Q_2 = q_2 + q$.

В термодинамике горячий термостат называют нагревателем, а холодный — охладителем. Как мы видели, для циклического функционирования теплового двигателя *охладитель столь же необходим, как и нагреватель*: сжимая неохлажденный газ, мы свели бы к нулю весь эффект, полученный при расширении. В то же время, в полезную работу превращается лишь часть энергии, получаемой от *нагревателя; остальная энергия передается охладителю.*

Крайне желательно, чтобы охладителю отдавалось как можно меньше энергии (так как двигатель строится для совершения работы, а вовсе не *для нагревания охладителя*). Чем больше берется теплоты от нагревателя, тем больше нужно материальных затрат на поддержание его температуры (приходится, например, сжигать больше топлива). Передача некоторого количества теплоты холодному термостату требует дополнительных забот по его охлаждению (ведь в случае повышения температуры охладителя до T_1 двигатель остановится).

Техническое совершенство теплового двигателя характеризуется его «термическим к. п. д.», который, как известно, определяется отношением

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Ведь в соответствии с первым законом термодинамики работа двигателя за цикл $A = Q_1 - Q_2$, так как после каждого цикла восстанавливается исходное состояние газа, а значит, и первоначальное значение его внутренней энергии. (Работа совершается исключительно за счет теплоты.)

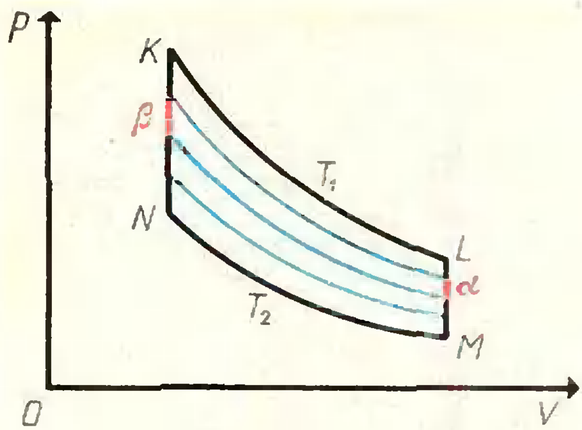


Рис. 6.

Усовершенствование теплового двигателя

Для повышения к. п. д. двигателя желательно уменьшить количество теплоты, не превращаемой в работу, а только «протекающей» через двигатель от нагревателя к охладителю. С этой точки зрения прежде всего привлекают к себе внимание изохорические процессы LM и NK, не связанные с совершением работы. Изохорически охлаждаясь (LM), газ отдает вовне столько же теплоты q, сколько потом приходится к нему подвести при изохорическом нагревании (NK).

Разобьем обе изохоры промежуточными (синими) изотермами на очень маленькие участки (рис. 6). Тогда можно считать, что в процессе охлаждения на любом участке — скажем, на участке α — теплота отдается в том же количестве, в каком подводится на участке нагрева (участок β) между теми же изотермами, при одной и той же температуре.

Целесообразно ли при этих условиях «сбрасывать» соответствующую энергию в охладитель, а потом заново брать столько же от нагревателя? Не лучше ли сохранить ее в какой-нибудь аккумуляторе энергии (или регенераторе) при двигателе, а затем вновь использовать?

Таким регенератором мог бы служить специальный термостат, разделенный на множество секций адиабатическими перегородками (рис. 7). Каждая секция имеет свою температуру (приблизительно соответствующую одной паре участков изохор LM и NK), так что последовательность всех секций в целом обеспечивает более или менее плавный переход от T_1 к T_2. В частности, при $T_1 = 450°$ К и $T_2 = 300°$ К секции могут иметь, например, температуры 440°, 430°, . . ., 320°, 310° К (чем больше секций, тем ближе реальный процесс к теоретическому).

Охлаждение по изохоре LM осуществляют, изолировав цилиндр от горячего термостата и последовательно устанавливая тепловой контакт со все более и более холодными секциями регенератора — например, передвигая его снизу вверх (см. рис. 7; ТС — теплопроводный стержень).

Аналогично при нагревании по изохоре NK к цилиндру поочередно «подключают» все более и более горячие секции регенератора. В итоге по завершении цикла все секции будут снова иметь первоначальный запас энергии, так что регенератор не нуждается ни в каком энергетическом взаимодействии с внешним миром.

При той же величине работы A за цикл использование регенератора снижает (на величину q) потребность двигателя как в притоке теплоты от нагревателя, так и в передаче ее

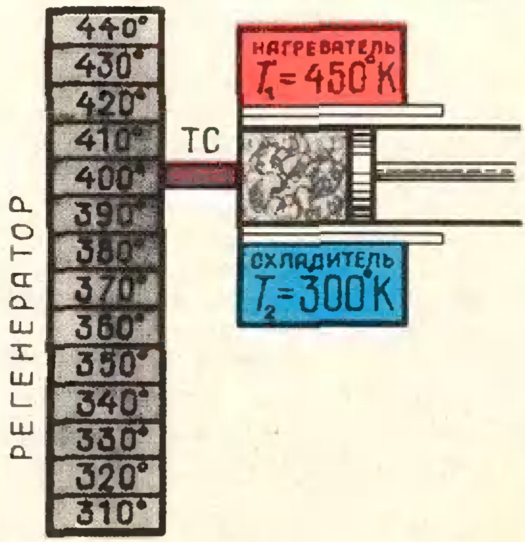


Рис. 7.

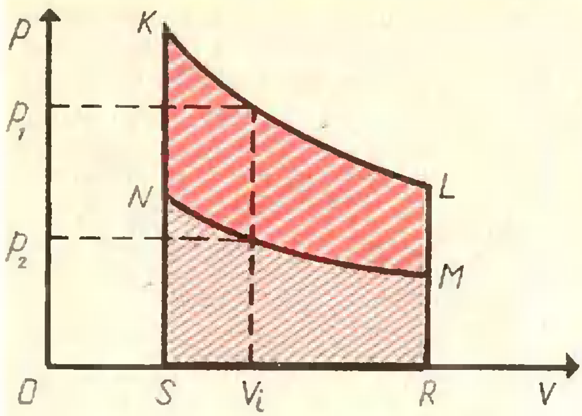


Рис. 8.

охладителю, так что $Q_1 = q_1 = A_1$, $Q_2 = q_2 = A_2$, где A_1 и A_2 — работы, совершаемые на изотермических участках KL и MN соответственно (см. рис. 8). Численно эти величины равны площадям криволинейных трапеций $KLRS$ и $NMRS$. Сравним эти площади.

При любом V_i давлении p_2 и p_1 (ординаты обеих изотерм) пропорциональны абсолютным температурам (закон Шарля):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

В таком же соотношении находятся, очевидно, и интересующие нас площади, а следовательно, и соответствующие количества теплоты Q_2 и Q_1:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Поэтому к. п. д. теплового двигателя с регенератором

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

К. п. д. двигателя с регенератором выше, чем к. п. д. двигателя без регенератора, поскольку разность $Q_1 - Q_2$ в обоих случаях одинакова, а теплота Q_1, отданная горячим термостатом, уменьшается на величину q.

Из-за технической сложности (ведь для идеального регенератора нужно разбивать интервал ΔT на бесконечно малые участки) такой регенератор практически неприменим.

Как мы увидим дальше, применимость последней формулы гораздо шире, чем для рассмотренного частного случая двигателя с регенератором. Так определяется к. п. д. любой тепловой машины, работающей по обратному циклу.

Обращение теплового двигателя

Тепловой двигатель с регенератором — это обратимая машина. Значит, он может функционировать и «вспять» по тому же самому циклу, проходя через все те же самые состояния, но только в обратной последовательности $KN \to NM \to ML \to LK$. При этом и все переходы энергии (работы и теплопередачи) меняют свое направление. Изохорическое охлаждение (KN) сопровождается передачей теплоты от газа к регенератору; изотермически расширяясь (NM), газ получает от холодного термостата теплоту q_2 и совершает работу A_2; изохорическое нагревание (ML) идет за счет теплопередачи от регенератора (возвращающегося при этом в начальное состояние); изотермическое сжатие (LK) при более высокой температуре $T_1 > T_2$ требует совершения внешними силами работы $A_1 > A_2$ с одновременной передачей теплоты $Q_1 = A_1$ горячему термостату.

Это уже не двигатель! Ведь совершаемая им за цикл работа

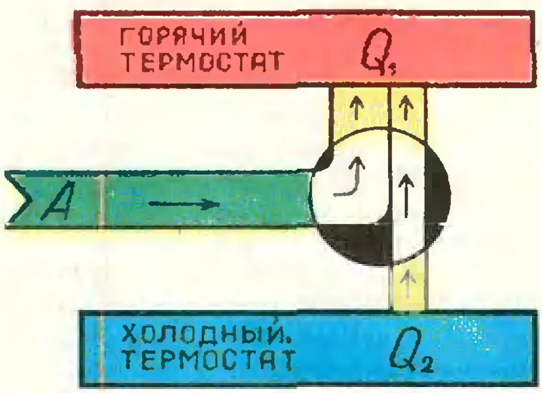


Рис. 9.

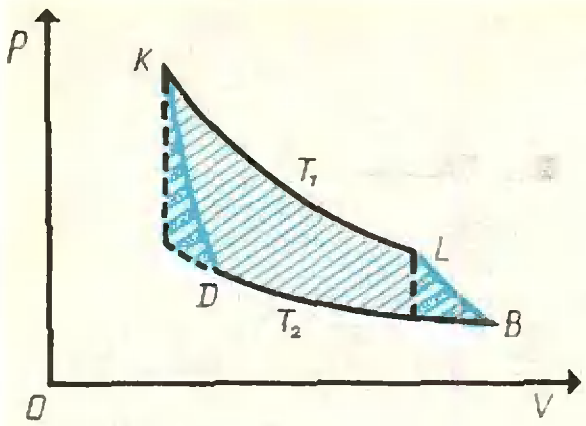


Рис. 10.

$A_2 - A_1$ отрицательна — его самого приходится приводить в движение каким-нибудь посторонним двигателем. Зато он отбирает от более холодного термостата теплоту Q_2 и передает ее горячему термостату, да еще с некоторой добавкой за счет работы постороннего двигателя (рис. 9), то есть как бы «накачивает» теплоту. Такой «тепловой насос» может использоваться как холодильник и для «динамического отопления» за счет тепла, отбираемого, скажем, от льда и снега на улице.

Итак, машина с регенератором обратима: совершив один цикл как двигатель и подняв груз, она может потом за счет его потенциальной энергии совершить еще один цикл уже в качестве теплового «насоса». В результате машина и все окружающие тела вернутся в исходное состояние.

Как мы увидим дальше, различие между обратимыми и необратимыми машинами играет в термодинамике очень большую роль.

Цикл Карно

Регенератор повышает к. п. д., избавляя двигатель от внешних теплопередач при понижении и повышении температуры газа. Но их можно избежать и без такого громоздкого устройства. Ведь совсем не обязательно отводить теплоту, чтобы охладить газ. Вместо этого можно заставить газ совершать работу, дав ему возможность расширяться адиабатически (то есть без подвода или отвода тепла).

Когда при изотермическом расширении газ достигнет состояния L (рис. 10), закрываются адиабатические заслонки и газу дается возможность расширяться, совершая работу за счет внутренней энергии (для этого надо, конечно, постепенно разгружать поршень, что может быть заранее обеспечено надлежащим выбором профиля кулачкового механизма). В процессе адиабатического расширения меняются и температура, и объем, и давление газа. На диаграмме p, V этот процесс изображается кривой, называемой адиабатой (на рисунке 10 адиабата — LB).

Когда температура газа в процессе расширения понизится до T_2 (точка B), открывается нижняя заслонка и устанавливается тепловой контакт с охладителем. После этого газ изотермически сжимают (изотерма BD)*).

Теперь надо нагреть газ до температуры T_1; это опять-таки делается без теплопередачи, адиабатическим сжатием (адиабата DK). За ним снова следует изотермическое расширение (KL), процесс повторяется (для обратного хода поршня на кулачке передаточного механизма предусматривается вторая дорожка).

Работы на адиабатических участках LB и DK равны по величине и противоположны по знаку (ведь ими энергетически заменены теплопередачи q).

Двигатель, работающий по рассмотренному нами циклу, был впервые описан в книге Сади Карно «Размышления о движущей силе огня

---

*) Если из начального состояния K производить адиабатическое расширение газа, то в момент, когда его температура станет равной T_2, остальные параметры будут иметь определенные значения p_2, V_2. Именно до такого состояния (p_2, V_2, T_2), которому соответствует точка D, и производится изотермическое сжатие (изотерма BD).

и о машинах, способных развивать эту силу» (1834 г.), его называют машиной Карно, а цикл — циклом Карно. Цикл Карно обратимый.

Рассчитать коэффициент полезного действия двигателя Карно сложнее, чем двигателя с регенератором. Но в этом нет надобности, так как для всех обратимых тепловых двигателей справедлива следующая теорема.

Теорема Карно. При заданных температурах нагревателя и охладителя все обратимые тепловые двигатели имеют одинаковые к. п. д. (при этом предполагается, что двигатели не вступают в тепловой контакт ни с какими телами, кроме нагревателя и охладителя).

Доказательство теоремы Карно основывается на втором законе термодинамики.

Второй закон термодинамики

Первый закон термодинамики, выражающий закон сохранения энергии, не накладывает ограничений на направление процессов (ведь если при переходе из состояния A в состояние B энергия остается неизменной, то она сохраняется также и при обратном переходе из B в A). Если, например, погрузить теплый камень в холодную воду, то с законом сохранения энергии одинаково совместимы как нагревание воды за счет охлаждения камня, так и дальнейший разогрев камня за счет остывания воды — лишь бы изменения энергии обоих тел были равны по величине и противоположны по знаку.

Однако никто не наблюдал, чтобы теплый камень сам собой раскалился за счет замерзания воды, в которую он брошен! Весь опыт человечества утверждает, что при тепловом контакте теплота всегда переходит от более горячего тела к более холодному, так что температуры обоих тел постепенно выравниваются. Именно с этим свойством и связано определение понятия «температура».

Но сколь ни убедительны эти факты, они касаются лишь теплообмена при простом тепловом контакте. Мы ведь знаем уже, что «тепловым насосом» можно отнять энергию от холодного тела и передать горячему. Но чтобы «насос» действовал, внешние тела должны совершать работу, так что по завершении цикла не всё возвращается в исходное состояние.

Второй закон термодинамики утверждает, что даже и косвенным путем невозможен некомпенсированный переход теплоты от более холодного тела к более горячему. «Некомпенсированный» — значит не оставляющий после себя никаких следов (то есть никаких изменений в каких бы то ни было телах, кроме разогрева горячего тела и остывания холодного). Нельзя так усовершенствовать тепловой насос, чтобы он путем теплопередачи отнимал энергию от холодного тела и отдавал горячему с возвращением всех прочих тел (включая и сам насос) в начальное состояние.

Понятно, что никаким опытом (или даже серией опытов) доказать такого рода отрицательное утверждение нельзя (как нельзя доказать экспериментально невозможность вечного двигателя). Как и многие другие законы, второй закон термодинамики принимается в физике как аксиома, из которой выводятся многочисленные и далеко идущие следствия. Неизменное согласие всех следствий с опытами и практикой и успешное предсказание на их основе новых фактов вселяет обоснованную уверенность в истинности закона.

Исходя из второго закона термодинамики можно показать, что нельзя некомпенсированно превратить теплоту в работу. Точнее, что невозможно циклически действующее устройство, которое получало бы энергию путем теплопередачи и совершало за ее счет работу, не оставляя никаких других изменений в окружающем мире.

Такое фантастическое устройство настолько заманчиво, что оно получило название «perpetuum mobile

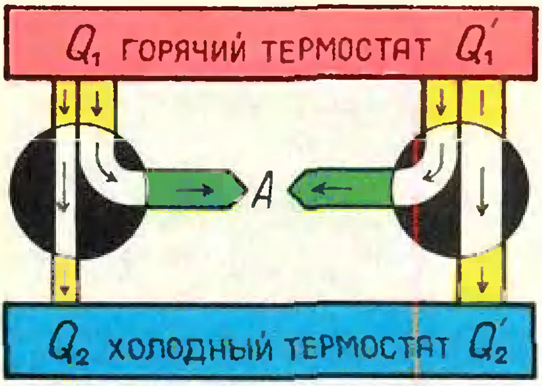


Рис. 11

второго рода». Практическая выгода от него была бы не многим меньше, чем от пресловутого «perpetuum mobile», (то есть вечного двигателя) первого рода, способного совершать работу вообще без затраты энергии. Действительно, «perpetuum mobile второго рода» мог бы совершать работу за счет незначительного охлаждения огромных масс земной коры или воды океанов.

Доказательство теоремы Карно

Применим теперь второй закон термодинамики для доказательства теоремы Карно.

Доказательство будем вести от противного. Допустим, что есть два обратимых двигателя с различными к. п. д. Совершая одинаковую работу, они получают от нагревателя и отдают охладителю различные количества теплоты (рис. 11).

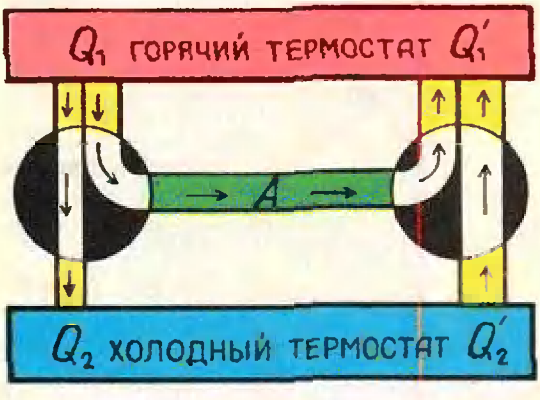


Рис. 12

Используя обратимость, превратим худший из двигателей (на нашем рисунке — правый) в тепловой «насос» с механическим приводом от другого двигателя (рис. 12). Полученный сложный агрегат не производит никаких внешних эффектов, кроме передачи теплоты от холодного термостата к горячему (а сам он периодически возвращается в исходное состояние). Противоречие со вторым законом термодинамики доказывает недопустимость сделанного предположения, а следовательно, доказывает и теорему Карно.

Для пары необратимых двигателей такое доказательство не проходит — они могут иметь и разные к. п. д.

А что, если один двигатель обратим, а другой — нет? Как видно из рисунка 12, к абсурду ведет предположение о худшем к. п. д. у обратимого двигателя (превращаемого в насос). Следовательно, необратимый тепловой двигатель не может иметь бо́льший к. п. д., чем обратимый.

В соответствии с теоремой Карно ранее выведенная формула для к. п. д. обратимого теплового двигателя с регенератором

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

автоматически распространяется на все обратимые тепловые двигатели.

Следовательно, для всех обратимых тепловых двигателей выполняется условие

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1},$$

или

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}.$$

Отношение количества теплоты к температуре рассматриваемого тела, участвующего в теплопередаче, в термодинамике называют приведенным теплом. Как видим, обратимый двигатель отдает охладителю столько же приведенного тепла, сколько получает от нагревателя (тогда как просто теплоты он отдает меньше, чем получает).

Последняя формула, разумеется, не зависит от направления работы обратимой тепловой машины, то есть остается справедливой и для теплового насоса (хотя о к. п. д. в этом случае говорить уже неуместно).

Для необратимых двигателей $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ является верхним пределом, то есть

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1},$$

откуда следует, что в необратимых двигателях $\frac{Q_2}{T_2} > \frac{Q_1}{T_1}$.

Упражнения

1. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы с помощью обращенного теплового двигателя с регенератором отнять 600 *дж* теплоты от тела с температурой 250° К и передать ее телу, имеющему температуру 300° К? Теплоемкости тел очень велики.

2. Электрическая плитка мощностью 1 *квт* поддерживает в комнате температуру $t_1 = 17°$ С при температуре наружного воздуха $t_2 = -12°$ С. Какая минимальная мощность потребовалась бы для этого при динамическом отоплении с помощью теплового насоса?

3. В качестве гипотезы рассмотрим человеческий организм как тепловой двигатель, для которого охладителем является атмосферный воздух, имеющий температуру 14° С. Какая минимальная температура «нагревателя» (расположенного внутри организма!) обеспечила бы экспериментально наблюдающийся к. п. д. 30%? Что можно на этом основании сказать о правдоподобии гипотезы? Теорему Карно считать доказанной.

4. На основе второго закона термодинамики докажите (от противного), что невозможен некомпенсированный переход теплоты в работу.

5. Как провести доказательство теоремы Карно в том случае, когда рассматриваемые тепловые двигатели совершают за цикл неодинаковые по величине работы? Когда продолжительность их циклов различна?

6. Исходя из неосуществимости «perpetuum mobile второго рода» как из аксиомы, выражающей второй закон термодинамики, докажите невозможность некомпенсированного перехода теплоты от более холодного тела к более горячему.

7. Приняв теорему Карно за аксиому, выражающую второй закон термодинамики, докажите невозможность некомпенсированного перехода теплоты от более холодного тела к более горячему, а также некомпенсированного преобразования теплоты в работу.

Из старого словаря

В 1842—1843 гг. вышли в свет четыре тома «Словаря церковно-славянского и русского языка», составленного Академией наук*). Интересно и поучительно посмотреть, как в те годы объясняли физические термины; ведь физика за 100 лет очень сильно изменила свой облик, так что многое сейчас может показаться курьезным. Но не надо забывать, что физика в первой половине прошлого века быстро развивалась и объяснения, о которых мы поговорим, доживали последние годы.

Итак посмотрим, что такое т е п л о т а. В словаре написано: «... То же, что теплород, теплотвор». Смотрим: «Т е п л о р о д — вещественная причина жара, тепла и холода; непостижимо тонкая жидкость, изливающаяся из Солнца и проникающая весь физический мир, невидимая, невесомая и только осязанием ощущаемая».

Еще Ломоносов объяснял теплоту движением, об этом говорили и философы древности и средних веков; но когда стали пытаться приписывать теплоте количественную меру, говорить о переходе теплоты от одного тела к другому, то к середине XVIII века пришли к теории флогистона-теплорода: представлению о теплоте как о жидкости, описанной выше. Только после того, как было выяснено, что теплота может переходить в другие виды энергии (слова «энергия» в словаре еще нет!) и что тела состоят из движущихся атомов и молекул, физики отказались от теплорода.

(Продолжение см. с.23)

*) В 1868—1869 гг. вышло второе издание (не измененное) Словаря.

О. А. Жаутыков

О границах корней кубического уравнения

Как известно, формулы, позволяющие точно выразить корни кубического уравнения через его коэффициенты, весьма громоздки. Поэтому часто бывает важно приближенно оценить корни кубического уравнения.

В этой статье оцениваются границы, в которых могут лежать действительные корни кубического уравнения.*)

Рассмотрим кубическое уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \qquad (1)$$

коэффициенты a, b, c, d — действительные числа, $a \neq 0$. Первое слагаемое ax^3 в левой части уравнения (1) называется его *старшим членом*, последнее слагаемое d — *свободным членом*.

Как известно**), уравнение (1) имеет три корня, один из которых — действительный, а два других — либо действительные, либо комплексно-сопряженные. Нас будут интересовать только *действительные* корни уравнения (1). Наша цель такова: *не вычисляя самих корней, получить некоторые границы* (оценки) *для них*, то есть указать на действительной оси интервалы, в которых лежат эти корни.

Для этого вместе с уравнением (1) рассмотрим многочлен третьей степени

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d. \qquad (2)$$

Что можно сказать о поведении этой функции при больших по абсолютной величине значениях x? Если аргумент x принимает возрастающие по абсолютной величине значения, то абсолютная величина каждого члена правой части равенства (2) будет возрастать, причем тем быстрее, чем выше степень этого члена.

Ясно, что быстрее всего будет возрастать абсолютная величина старшего члена ax^3. Поэтому можно ожидать, что если выбрать значение $|x|$ достаточно большим, то абсолютная величина старшего члена ax^3 будет больше абсолютной величины суммы всех остальных членов, то есть

$$|ax^3| > |bx^2 + cx + d|. \qquad (3)$$

Докажем, что это неравенство справедливо для всех x, достаточно больших по абсолютной величине.

Поскольку абсолютная величина суммы не превышает суммы абсолютных величин слагаемых, то

$$|bx^2 + cx + d| \leqslant |b|\, x^2 + |c|\,|x| + |d|.$$

Положив, $|x| = v$, перепишем это неравенство:

$$|bx^2 + cx + d| \leqslant |b| \cdot v^2 + |c|\, v + |d|. \qquad (4)$$

Коэффициенты $|b|$, $|c|$ и $|d|$, стоящие в правой части неравенства (4), — неотрицательные действительные числа; обозначим наибольшее из них через M:

$$M = \max(|b|, |c|, |d|). \qquad (5)$$

Если в правой части неравенства (4) вместо каждого из коэффициентов $|b|$, $|c|$, $|d|$ подставить число M,

*) Эта статья — продолжение цикла материалов, посвященных кубическим уравнениям (см. «Квант», 1971, №11, 1972, №6).

**) См. «Квант», 1971, № 11, с. 20—21.

то неравенство (4) от этого только усилится. Следовательно, справедливо неравенство

$$|bx^2+cx+d|\leqslant M(v^2+v+1),$$

которое, если воспользоваться известным тождеством,

$$v^2+v+1=\frac{v^3-1}{v-1},\quad v\neq 1,$$

можно записать в виде

$$|bx^2+cx+d|\leqslant M\frac{v^3-1}{v-1}. \qquad (6)$$

Так как нас интересуют большие значения $|x|=v$, то будем считать, что $v>1$. Но тогда

$$\frac{M(v^3-1)}{v-1}<\frac{Mv^3}{v-1},$$

и потому неравенство (6) примет вид

$$|bx^2+cx+d|<\frac{Mv^3}{v-1},\quad |x|=v>1. \qquad (7)$$

Если нам удастся показать, что абсолютная величина старшего члена ax^3 для всех достаточно больших по абсолютной величине значений x (таких, что выполнено и условие $v>1$) больше выражения $\frac{Mv^3}{v-1}$, стоящего в правой части неравенства (7), то неравенство (3) будет доказано. Посмотрим, как надо выбрать $|x|=v$, чтобы выполнялось неравенство $|ax^3|>\frac{Mv^3}{v-1}$, то есть

$$|a|v^3>\frac{Mv^3}{v-1}.$$

Решая полученное неравенство относительно v, находим, что оно заведомо выполнено для всех

$$v>\frac{M+|a|}{|a|}. \qquad (8)$$

Так как $\frac{M+|a|}{|a|}\geqslant 1$ (ибо $M\geqslant 0$), то при условии (8) всегда выполнено и неравенство $v>1$. Тем самым установлено, что *неравенство* (3) *справедливо для*

$$|x|\geqslant\frac{M+|a|}{|a|}. \qquad (9)$$

Отсюда следует, что для значений x, удовлетворяющих условию (9), функция (2) не может обратиться в нуль. Другими словами, *все действительные корни уравнения* (1) *удовлетворяют неравенству*

$$|x|\leqslant\frac{M+|a|}{|a|}. \qquad (10)$$

Положительное число $A=\frac{M+|a|}{|a|}$ называется *верхней границей* действительных корней кубического уравнения (1).

Оказывается, что можно найти и *нижнюю границу* действительных корней кубического уравнения (1), то есть такое неотрицательное число B, что все действительные корни уравнения (1) удовлетворяют неравенству $|x|\geqslant B$.

Для этого сделаем в уравнении (1) замену

$$x=\frac{1}{z}. \qquad (11)$$

Тогда после очевидных преобразований получим уравнение

$$dz^3+cz^2+bz+a=0. \qquad (12)$$

Будем считать, что в уравнении (1) свободный член $d\neq 0$, ибо случай $d=0$ интереса не представляет (уравнение (1) в этом случае имеет корень $x=0$, а остальные его корни определяются из квадратного уравнения).

Так как $|x|=\frac{1}{|z|}$ (см. (11)), то ясно, что из неравенства $|z|<K$, где $K>0$, следует неравенство $|x|>\frac{1}{K}$. Поэтому если в качестве K взять верхнюю границу действительных корней уравнения (12), то число $\frac{1}{K}$ будет нижней границей действительных корней уравнения (1). Но верхнюю границу K действительных корней уравнения (12) находить мы уже умеем (см. (5), (10)):

$$K=\frac{N+|d|}{|d|},\quad \text{где}$$

$$N=\max(|c|,\ |b|,\ |a|). \qquad (13)$$

Поэтому нижняя граница действительных корней кубического уравнения (1) такова:

$$B = \frac{|d|}{N+|d|}. \qquad (14)$$

Остается заметить, что эта формула годится и в случае $d = 0$, тогда нижняя граница, очевидно, равна нулю (ибо имеется нулевой корень), и именно этот же результат получается по формуле (14) (при этом, конечно, $N \neq 0$, ибо в уравнении (1) по предположению $a \neq 0$).

Подведем итог: *все действительные корни кубического уравнения* (1) *удовлетворяют неравенству*

$$B \leqslant |x| \leqslant A,$$

где числа A и B определяются через коэффициенты уравнения по формулам (10), (5) *и* (14), (13). Другими словами, действительные корни кубического уравнения (1) могут лежать только на отрезках $[-A, -B]$ и $[B, A]$ действительной оси; вне этих отрезков действительных корней уравнение (1) заведомо не имеет.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 = 0.$$

Здесь $M = 5$, $|a| = 2$, а потому $A = \frac{7}{2}$. Таким образом, верхняя граница действительных корней рассматриваемого уравнения равна $\frac{7}{2}$. Далее, $N = 5$, $|d| = 3$, а потому $B = \frac{3}{8}$. Следовательно, нижняя граница действительных корней рассматриваемого уравнения равна $\frac{3}{8}$. Другими словами, вещественные корни рассматриваемого уравнения лежат на отрезках $(-{}^7/_2, -{}^3/_8)$ и $({}^3/_8, {}^7/_2)$.

Из старого словаря

(Продолжение. Начало см. с. 20)

Посмотрим на слово электричество. Читаем: «... Вещество, тончайшее из всех известных жидких тел, сообщающееся почти со всеми телами, в большей или меньшей мере, и движущееся с необыкновенной скоростью».

К этому описанию можно добавить, что в начале XIX века считалось, что существуют две электрические жидкости, отвечающие двум зарядам — положительному и отрицательному. К этим жидкостям добавлялись еще две магнитные (северный и южный магнетизм), жидкость, связанная с силой тяжести, и теплород.

Интересно, что в Словаре различаются «тяжесть — естественная сила, побуждающая всякое тело стремиться к низу или к центру Земли», и «всеобщее тяготение — взаимное привлечение всех небесных тел».

Можно понять, почему с теплотой и электричеством связывали существование специфических жидкостей. Физики заметили, что в природе есть нечто, что сохраняется. Простейшим и самым понятным законом был закон сохранения вещества — в частности, жидкости. Этим законом широко пользовались в гидродинамике. Поэтому и с другими сохраняющимися величинами долго пытались связать специальные жидкости. То, что эти жидкости должны были необычайно легко проникать во все тела, на первых порах мало кого смущало: тела представлялись простыми, а жидкости «тонкими».

(Окончание см. с. 28)

Что видит внимательный глаз

На обложке нарисован правильный 24-угольник. Внимательно рассматривая его, можно обнаружить несколько правильных многоугольников, получившихся в пересечении диагоналей, отрезков диагоналей и сторон.

Видны, например, равносторонние треугольники и квадраты, причем их центры могут быть отличными от центра данного 24-угольника. Заметили ли вы их, глядя на рисунок? Если нет — не беда. Некоторые из квадратов выделены на рисунке 1, некоторые правильные треугольники — на рисунке 2.

Впрочем, нужно еще убедиться в том, что эти многоугольники действительно правильные; чертеж сам по себе, как бы тщательно он ни был выполнен, таких гарантий не дает.

Для доказательства представим себе мысленно, что 24-угольник вписан в окружность, и рассмотрим углы, образованные ее хордами, а также заметим, какие отрезки на чертеже равны и почему (само доказательство проведите самостоятельно). Рисунки 1 и 2, соответственно иллюстрирующие характерные случаи образования квадратов и правильных треугольников, помогают справиться и с более сложной задачей: выяснить, сколько на обложке нарисовано правильных треугольников и квадратов.

Обратимся вновь к обложке. Отчетливо видно, как, пересекаясь, диагонали 24-угольника, ближайшие к его центру, образуют фигуру, которую глаз решительно отказывается отличить от окружности (в действительности это, конечно, правильный 24-угольник). В некотором удалении от центра данного 24-угольника видим концентрические вторую и третью и не столь явно выраженные четвертую и пятую «окружности». Другие «окружности» диаметром побольше не видны, не заметны. Сколько их? Ответ на этот вопрос может подсказать рисунок 3.

На рисунке 4 изображен правильный звездчатый 24-угольник. Можно проверить непосредственно, пройдя глазом по каждому из звеньев ломаной, действительно ли это многоугольник, то есть является ли начертанная ломаная замкнутой, не распадается ли фигура на несколько замкнутых ломаных.

При этом остается, однако, невыясненным вопрос: возможны ли другие правильные звездчатые 24-угольники? Если смотреть только на рисунок, то проверить это трудно. При помощи визуальных наблюдений можно проверить, что если вершины 24-угольника соединяются через одну, то ломаная замкнется в 12-угольник, если через две, то в 8-угольник... Почему это произошло? Не связано ли это с тем, что деление числа сторон данного 24-угольника на два приводит к числу 12, а на 3 дает 8? Теперь вы, наверное, можете установить число правильных звездчатых 24-угольников, и не прибегая к рисунку (как?).

Красивое решение имеет следующая задача: «В скольких точках пересекаются диагонали n-угольника ($n \geq 4$), если известно, что никакие три из его диагоналей не пересекаются в одной точке (не считая вершин)?».

Действительно, если взять произвольно четыре вершины этого n-угольника, то они определяют четырехугольник, причем одна из искомых точек лежит в пересечении его диагоналей. Учитывая, что, по условию задачи, никакие три диагонали не пересекаются в одной точке, получаем, что точек пересечения диагоналей ровно столько, сколькими способами можно выбрать 4 из n, то есть C_n^4.

В случае 24-угольника, у которого никакие три диагонали не пересекаются в одной точке, точек пересечения диагоналей было бы C_{24}^4. Но раз данный 24-угольник —

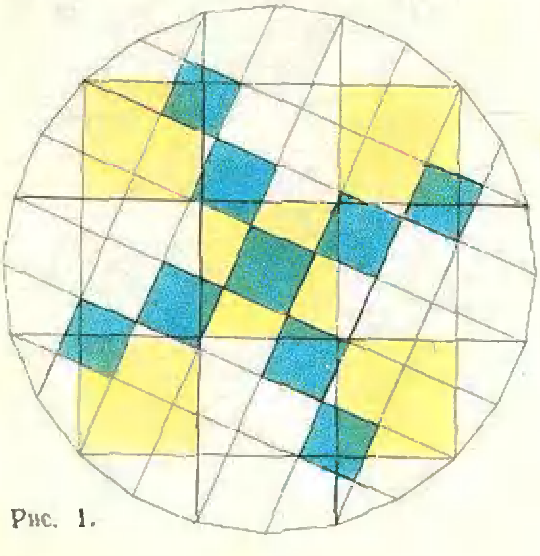


Рис. 1.

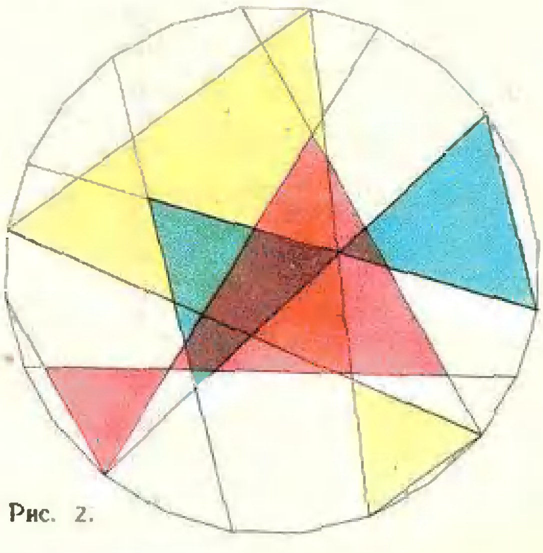


Рис. 2.

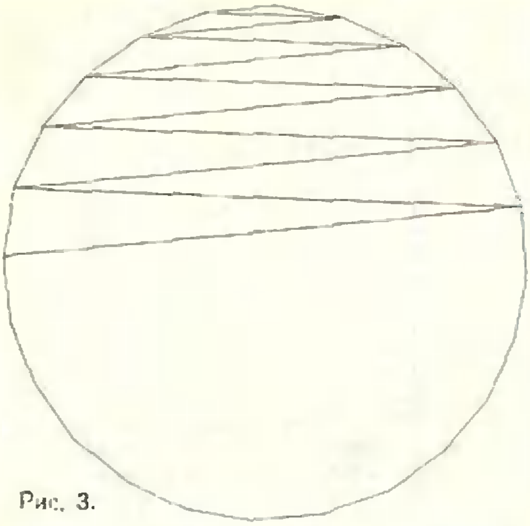


Рис. 3.

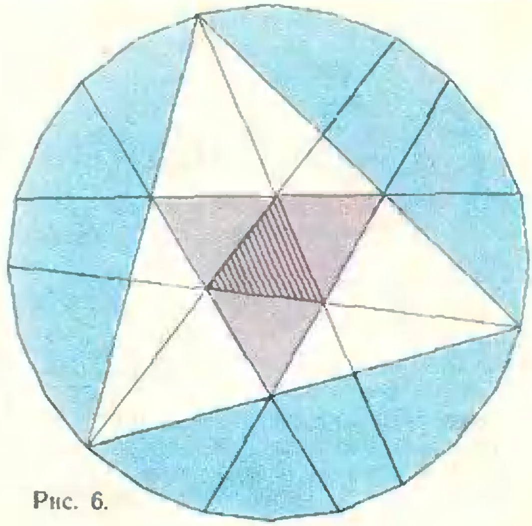


Рис. 6.

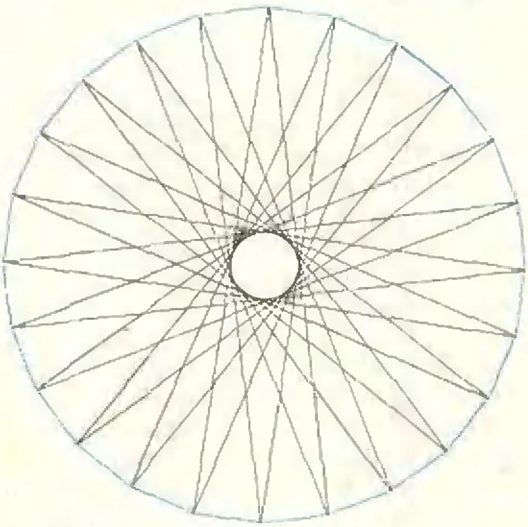


Рис. 4.

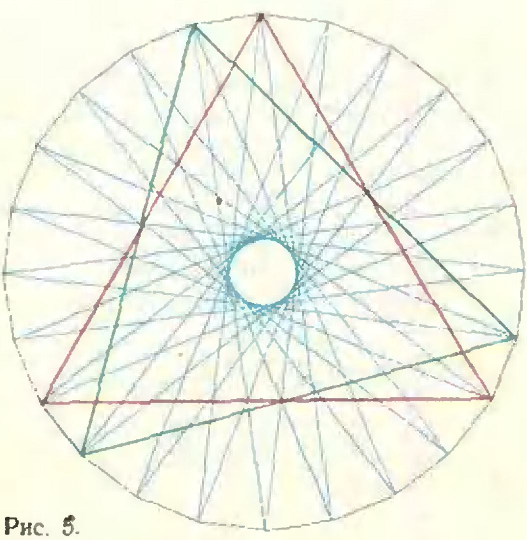


Рис. 5.

правильный, то таких точек меньше. C_{24}^4 дает оценку сверху. На рисунке (см. обложку) видно, что в некоторых точках пересекаются по три и более диагоналей. Но, может быть, зрение нас обманывает и в действительности на чертеже приводится не одна точка пересечения трех прямых, а две очень близкие, а потому и неразличимые на глаз точки пересечения пар диагоналей?

В некоторых случаях несложные рассуждения подтверждают правильность увиденного. Например, почти очевидно, что более чем двухкратными являются точки пересечения диагоналей, принадлежащие диагоналям правильного 24-угольника, которые являются осями его симметрии. Установите наличие (или отсутствие) более чем двукратных точек пересечения диагоналей на рисунках 5, 6.

Можно показать, что в вершинах выделенных на рисунке 6 правильных треугольников пересекаются более двух диагоналей данного правильного 24-угольника. Попробуйте это сделать.

Попробуйте уточнить оценку числа пересечений диагоналей правильного 24-угольника.

Попробуйте получить правильный 24-угольник, пользуясь только перегибанием листа бумаги.

В. Н. Березин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

КАКИХ ЧИСЕЛ БОЛЬШЕ?

Ю.П. Лысов

Каких чисел больше — натуральных или четных? Где больше точек — на отрезке или прямой? Можно ли найти множество, у которого больше элементов, чем у данного множества? Выясняя эти естественные вопросы, Георг Кантор ввел в математику идеи и рассуждения, из которых выросла теория множеств — фундамент основных разделов современной математики *).

Попробуем на этом и одном из следующих занятий математического кружка ответить на вопросы, которые ставил перед собой Кантор.

Что мы делаем, если желаем ответить на вопрос: *кого в классе больше — девочек или мальчиков*? Обычно мы поступаем так: пересчитываем девочек, мальчиков, а затем сравниваем полученные два числа. Этот способ дает возможность сравнивать различные конечные множества. Но всегда ли мы им пользуемся?

Представьте себе, что вы входите в зрительный зал кинотеатра после третьего звонка и пытаетесь выяснить, чего больше — зрителей или кресел. Посмотрев в зал, вы замечаете, что все зрители сидят, и в то же время несколько кресел остались свободными. Ответ на вопрос ясен — кресел больше.

Вы установили соответствие между зрителями и частью кресел. Этот принцип взаимного соответствия поможет нам в сравнении бесконечных множеств. (Впрочем, в неявном виде соответствие было установлено и в первом примере с девочками и мальчиками.)

Определение 1. *Взаимно однозначным соответствием множеств A и B называется правило, которое каждому элементу множества A ставит в соответствие один определенный элемент множества B, так что при этом каждый элемент множества B поставлен в соответствие ровно одному элементу множества A.*

Задача 1. *Установите взаимно однозначное соответствие между множеством A натуральных чисел и множеством B целых чисел, меньших 0.*

Натуральному числу k, принадлежащему множеству A, ставим в соответствие число $-k$, принадлежащее множеству B. Легко заметить, что это соответствие является взаимно однозначным.

Построенное соответствие показывает, что в множестве A столько же элементов, сколько в B. Полученный результат хорошо согласуется с нашими наглядными представлениями.

Задача 2. *Установите взаимно однозначное соответствие между множеством A натуральных чисел и множеством B четных натуральных чисел.*

Натуральному числу n поставим в соответствие четное число $2n$.

Получаем, что натуральных чисел (A) столько же, сколько и четных натуральных (B). Но множество B целиком содержится в множестве A. Нет ли здесь ошибки? Ошибки нет.

*) Подробнее об этом рассказано в статье Л. А. Калужнина. К 100-летию теории множеств Георга Кантора, с. 2.

Все верно, и в этом легко убедиться, если на одной числовой прямой отметить натуральные числа, а на другой — четные и расположить эти прямые одну под другой (см. рисунок; на прямых разный масштаб).

Здесь проявляется важное отличие конечных множеств от бесконечных: часть бесконечного множества может быть в определенном смысле равной всему множеству. Такое равенство называют *эквивалентностью*.

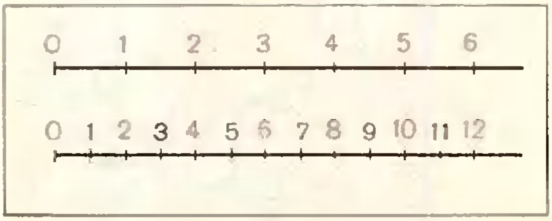
Определение 2. *Два множества A и B называются эквивалентными (количественно эквивалентными, равномощными), если между ними существует взаимно однозначное соответствие.*

Задача 3. *Докажите, что множество всех целых чисел эквивалентно множеству всех натуральных чисел.*

Мы видим, что целые числа расположены на прямой не так, как натуральные, но все-таки эти множества эквивалентны. Множества, эквивалентные натуральному ряду, для упрощения формулировок, называют счетными множествами.

Определение. 3. *Множество называется счетным, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел, то есть элементы этого множества можно выписать в строчку в соответствии с присвоенными им номерами.*

В множестве целых чисел у каждого элемента имеются два «соседних». Может быть, в множестве, в котором не для каждого элемента можно указать «соседа», будет больше элементов, чем в счетном? Рассмотрим, например, множество правильных дробей. Для любых двух дробей a и b $(a < b)$ найдется правильная дробь



c такая, что $a < c < b$, то есть «соседа» нет. И тем не менее это множество тоже счетно.

Задача 4. *Докажите, что множество правильных дробей счетно.*

Указание. Воспользуйтесь тем, что число правильных дробей со знаменателем, равным N, конечно.

Задача 5. *Докажите, что множество всех рациональных чисел счетно.*

Решение задачи 5 можно получить, используя в качестве леммы задачу 4.

Возникает гипотеза, что все бесконечные множества эквивалентны множеству натуральных чисел. Однако это не так. Величайшим достижением Кантора было решение следующей задачи.

Задача 6. *Докажите, что нельзя установить взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел и множеством бесконечных последовательностей из* 0 *и* 1.

Решение этой задачи приведено на с. 8, но если вы еще его не читали, попробуйте решить задачу самостоятельно. (Автор статьи знаком с большим количеством школьников, решивших ее.)

Итак, мы убедились в существовании несчетных множеств, но это тема одного из следующих занятий кружка, а сейчас познакомимся еще с несколькими счетными множествами.

Задача 7. *Множество всевозможных русских слов счетно* (мы, разумеется, считаем, что каждое слово состоит из конечного числа букв).

Задача 8. *Множество всевозможных конечных наборов целых чисел счетно.*

Если учесть, что любое уравнение степени n имеет не более n корней, то легко получается решение следующей задачи.

Задача 9. *Множество чисел, каждое из которых является решением какого-то уравнения с целыми коэффициентами, счетно.*

Множество чисел из задачи 9 называется множеством алгебраических чисел. Докажите, что все рациональные числа и всевозможные комбинации радикалов и рациональных чисел являются алгебраическими числами. Алгебраическими являются и некоторые числа, которые нельзя записать в радикалах (существование таких чисел в 1824 году доказал норвежский математик Нильс Хенрик Абель). Из задач 6 и 9 следует существование неалгебраических чисел. Такие числа называются трансцендентными.

В заключение предлагаем вашему вниманию более трудные задачи.

Задача 10. *Множество M состоит из восьмерок, лежащих на плоскости и не пересекающих друг друга (восьмерка — пара касающихся окружностей, каждая из которых может быть любого размера). Докажите, что M конечно или счетно.*

Нетрудно заметить, что, располагая на плоскости непересекающиеся буквы «Г» или «О», можно получить несчетное множество. Существует ли ещё какая-нибудь буква, обладающая тем же свойством, что и восьмерка?

Задача 11. *Множество M состоит из букв «Т», лежащих на плоскости и не пересекающих друг друга. Докажите, что M конечно или счетно.*

Решив предыдущую задачу, вы без особого труда сможете сказать про каждую букву русского алфавита, может ли эта буква находиться на плоскости в несчетном количестве, или при любом расположении она образует не более чем счетное множество.

Задача 12. *Число x_0 называется максимумом функции $f(x)$, если существует положительное число δ такое, что $f(x)$ в интервале $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ больше всякого другого значения функции в этом интервале. Докажите, что множество максимумов любой функции конечно или счетно.*

Из старого словаря

(Окончание. Начало см. с. с. 20, 23)

Такая картина была отвергнута лишь к концу века, когда был открыт электрон.

Еще одно слово: «Эфир — материя жидкая, как воздух, но несравненно его тоньше...»

Общепринято было считать, что всю Вселенную заполняет эфир, который проникает во все тела и служит средой, передающей свет, подобно тому, как воздух есть среда, передающая звук. Весь XIX век (особенно его конец) был посвящен попыткам построить теорию эфира. Лишь в начале XX века Эйнштейн показал, что существование эфира является лишней гипотезой, которая без всякого вреда может быть отброшена. Так и было сделано. Ложная уверенность в необходимости среды для передачи света была столь сильна, что гипотеза эфира была использована Максвеллом в его теории электромагнитного поля, которая, как мы сейчас знаем, совсем не нуждается в эфире.

Итак, мы привели три определения, от которых уже давно не осталось и следа. Но строки в Словаре, как раскопанные курганы, помогают нам осознать, сколь стремительно развивается наука.

Я. С.

задачник кванта

Решения задач из этого номера можно посылать не позднее 31 января 1974 г. по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, издательство «Наука», журнал «Квант». После адреса на конверте напишите, решения каких задач вы посылаете, например: «Задачник «Кванта», М236, М237» или «... Ф248».
Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Оригинальные задачи, предлагаемые для публикации, присылайте вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). Задачи из разных номеров журнала присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки ваших решений).
Задачи повышенной трудности отмечены звездочкой.
После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Задачи

М236—М240; Ф248—Ф252

М236. а) Имеется 51 двузначное число. Докажите, что из этих чисел можно выбрать по крайней мере 6 чисел так, чтобы никакие два из выбранных чисел ни в одном разряде не имели одинаковой цифры.

б) Даны натуральные числа k и n, $1 < k < n$. Для какого наименьшего m верно следующее утверждение: при любой расстановке m ладей на доске размером $n \times n$ можно выбрать k ладей из этих m так, чтобы никакие две из выбранных людей не били друг друга?

А. Ю. Сойфер и С. Г. Слободник

М237. Углы остроугольного треугольника равны α, β и γ. Какие массы нужно поместить в его вершинах, чтобы центр тяжести этих трех масс попал

а) в точку пересечения высот?

б) в центр описанной окружности?

Стороны треугольника равны a, b и c. Какие массы нужно поместить в его вершины, чтобы центр тяжести попал

в) в точку пересечения отрезков, соединяющих вершины и точки касания противоположных им сторон со вписанной окружностью?

г) в центр вписанной окружности?

Б. Д. Гинзбург

М238*. Докажите, что сумма $C_n^1 + C_n^3 \cdot 1973 + C_n^5 \cdot (1973)^2 + C_n^7 (1973)^3 + \ldots$ делится на 2^{n-1}. (Здесь C_n^k — коэффициенты многочлена

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.\ )$$

Ф. Г. Шлейфер

М239. На плоскости заданы две точки A и B. Пусть C — некоторая точка, одинаково удаленная от A и B. Построим последовательность точек $C_1 = C, C_2, C_3, \ldots, C_n, C_{n+1}, \ldots$ где C_{n+1} — центр окружности, описанной около треугольника AC_nB. При каком положении точки C

а) точка C_n попадет в середину отрезка AB (при этом C_{n+1} и дальнейшие члены последовательности не определены)?

б) точка C_n совпадает с C?

Н. Чернов, ученик 10 класса (Кривой Рог)

М240. По заданному x значение x^8 можно найти за три арифметических действия: $x^2 = x \cdot x$, $x^4 = x^2 \cdot x^2$, $x^8 = x^4 \cdot x^4$, а x^{15} — за пять действий: первые три — те же самые, затем $x^8 \cdot x^8 = x^{16}$ и $x^{16} : x = x^{15}$. Докажите, что

а) x^{1000} можно найти за 12 действий (умножений и делений);

б)* для любого натурального n значение x^n можно найти более чем за $\frac{3}{2}\log_2 n + 1$ действий.

Э. Г. Белага

Ф248. Тонкий тяжелый обруч радиуса R с очень легкими спицами может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. К обручу прикрепили маленький шарик, масса которого равна массе обруча. Найти период малых колебаний обруча с шариком. Для этого можно попытаться найти аналогию в движении обруча с шариком и математического маятника.

Ф249. Невесомый стержень, на концах которого закреплены шарики массами m и M, опирается серединой на жесткую подставку, вокруг которой он может свободно вращаться в вертикальной плоскости.

В начальный момент стержень расположен горизонтально, а скорость его равна нулю. С какой силой давит он в этот момент на подставку?

Ф250. Одинаковые заряды q находятся на расстояниях a и b от заземленной сферы малого радиуса r (рис. 1). Расстояние до поверхности земли и других заземленных предметов много больше a и b. Найти силу, с которой заряды действуют на сферу.

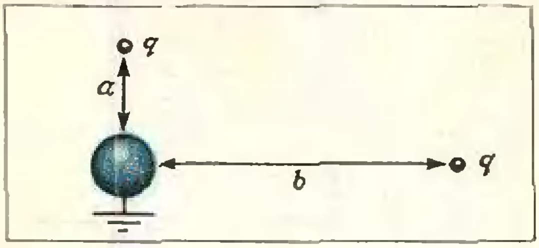


Рис. 1.

Ф251. На фотографии летящей пули (рис. 2) видны звуковые волны, которые возбуждаются при движении пули. (Такую фотографию удалось получить благодаря тому, что области, в которых плотность воздуха различна, по-разному преломляют световые лучи.) Воспользовавшись линейкой, определите примерную величину скорости пули. Скорость звука в воздухе равна 340 *м/с*.

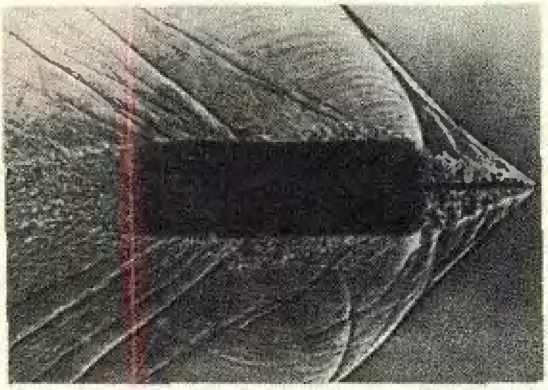


Рис. 2.

Ф252. На цилиндрический столб намотан канат. За один из концов каната тянут с силой F. Для того чтобы канат не скользил по столбу, когда на столб намотан только один виток каната, второй конец каната нужно удерживать с силой f. С какой силой нужно удерживать этот конец каната, если на столб намотано n его витков? Как изменится сила f, если взять столб вдвое большего радиуса? (Сила f не зависит от толщины каната.)

Решения задач

M179; M196—M199; Ф208, Ф209

M179. В «Кванте» № 8 за 1973 год было опубликовано решение задачи M179. При этом мы предложили читателям самостоятельно закончить решение задачи. Мы надеемся, что вы это сделали и можете сравнить свое решение с нашим.

Напомним формулировку задачи.

Для каждого треугольника T строится последовательность треугольников

$$T_0 = T,\ T_1,\ T_2,\ T_3,\ \ldots,$$

где T_n — треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника T_{n-1}. Требуется выяснить, сколько существует попарно неподобных друг другу треугольников T таких, для которых T_n подобен T (при каждом фиксированном n).

Обозначим через (α, β, γ), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, …, $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ углы треугольника T и соответствующих ему треугольников $T_1, \ldots, T_n$. Требуется узнать, сколько существует троек (α, β, γ) таких, для которых тройка $(\alpha_n; \beta_n, \gamma_n)$ совпадает с (α, β, γ) или получается из нее перестановкой, причем $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$.

Тройки (α, β, γ) и их преобразования

$$(\alpha, \beta, \gamma) \xrightarrow{h} (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \quad (\alpha, \beta, \gamma) \xrightarrow{h^n} (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$$

удобно представлять себе геометрически следующим образом. Нарисуем треугольник Y, у которого длина каждой высоты равна π, и будем изображать тройку неотрицательных чисел (α, β, γ), для которой $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, точкой y внутри этого треугольника, расстояния от которой до сторон равны соответственно α, β и γ (рис. 1). Такое соответствие

$$(\alpha, \beta, \gamma) \to y$$

между тройками (α, β, γ) и точками $y \in Y$ будет взаимно однозначным. Перестановкам чисел в тройке (α, β, γ) соответствуют перемещения треугольника, совмещающие его с самим собой (повороты и симметрии относительно высот). Напомним, что преобразование h геометрически описывается так. На средних линиях треугольника Y (точкам y средних линий соответствуют прямоугольные треугольники T) h не определено, а каждый из четырех треугольников, на которые средние линии разбивают треугольник Y, h отображает на весь Y, причем это отображение — преобразование подобия с коэффициентом 2, переводящее каждый отрезок в параллельный ему отрезок. Отсюда индукцией по n получаем, что преобразование h^n устроено аналогично: на прямых, параллельных сторонам и разбивающих высоты на 2^n равных частей, h^n не определено; в каждом из 2^{2n} треугольничков, на которые эти прямые разбивают Y, h^n — преобразование подобия с коэффициентом 2^n, отображающее этот треугольничек на весь Y. (На рисунке 2 изображено h^2.)

Условия $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$ выделяют один из шести треугольников, на которые разбивают треугольник Y его высоты. Этот прямо-

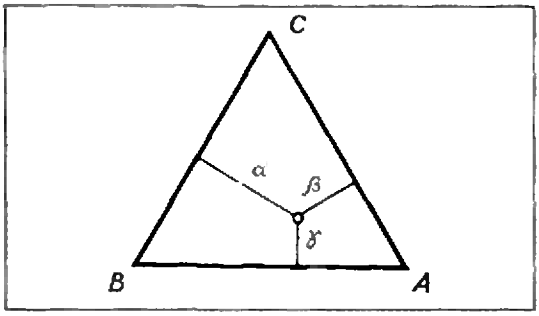


Рис. 1.

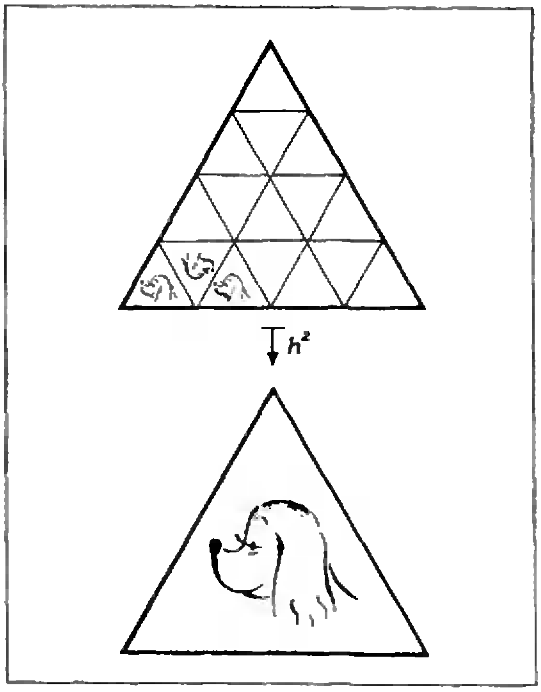


Рис. 2.

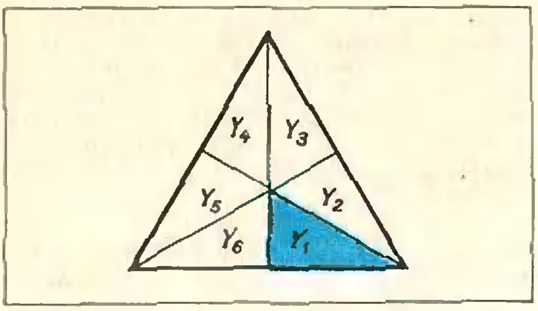


Рис. 3.

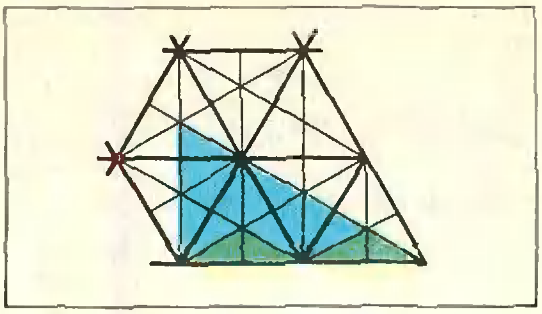


Рис. 4.

угольный треугольник обозначим Y_1, остальные — как показано на рисунке 3 — обозначим соответственно $Y_2, \ldots, Y_6$. Пусть f_j: $Y \to Y$ — перемещение Y такое, что $f_j(Y_j) = Y_1$. Если каждый из 2^{2n} маленьких треугольничков, которые отображаются преобразованием h^n на весь треугольник Y, разбить высотами на шесть треугольников, то Y_1 будет разбит на 2^{2n} подобных ему (с коэффициентом 2^n) треугольничков, которые мы обозначим через X_j, $1 \leqslant j \leqslant 2^{2n}$ (рис. 4). После отображения h^n каждый X_i перейдет в некоторый Y_j, и если затем переставить числа в тройке $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ в порядке убывания — применить f_j, то произведение двух преобразований $f_j \cdot h^n$ отображает X_i на Y_1 (преобразование подобия с коэффициентом 2^n).

Мы утверждаем, что в каждом из 2^{2n} треугольников $X_i \subset Y_1$ существует ровно одна «неподвижная точка» y_i такая, что $y_i \in X_i$ и $f_j(h^n(y_i)) = y_i$. Из ответа нужно еще исключить неподвижные точки тех треугольников X_i, у которых бо́льшие катеты лежат на бо́льшем катете треугольника Y_1 (их существует именно столько, каков коэффициент подобия), поскольку для этих (и, как нетрудно видеть, только для этих) треугольников «неподвижная точка» попадает на границу, где отображение h^n не определено. Отсюда сразу следует, что ответ в нашей задаче: $2^{2n}-2^n$. (На рисунке 4 в каждом из 12 голубых треугольничков лежит по одной точке (α, β, γ), для которой $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ после перестановки в порядке убывания совпадает с (α, β, γ).)

Осталось только доказать наше утверждение. Для этого мы применим к треугольнику Y_1 и отображению p этого треугольника на $X_i \subset Y_1$, обратному к $f_j \circ h^n$, следующую теорему.

Т е о р е м а. *Пусть Z — некоторая фигура на плоскости (причем все граничные точки Z считаются принадлежащими Z), p: $Z \to Z$ — преобразование подобия с коэффициентом $k < 1$. Тогда существует ровно одна «неподвижная точка» преобразования p, принадлежащая Z, то есть только одна $z_0 \in Z$, для которой $p(z_0) = z_0$.*

Доказательство теоремы для ограниченной фигуры Z (а именно этот случай нам нужен) проще всего провести так. Пусть $Z_n = p^n(Z)$ (результат n-кратного применения p к Z). Тогда $Z \supset Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3 \supset \ldots$ и пересечение всех Z_n состоит из одной точки z_0 (рис. 5). Эта точка и будет неподвижной точкой преобразования p.

Другое доказательство, позволяющее явно указать неподвижную точку и пригодное для неограниченных фигур Z, можно получить с помощью комплексных чисел. Любое преобразование подобия плоскости можно записать как результат последовательного выполнения поворота, растяжения в k раз, параллельного переноса: $z \overset{p}{\mapsto} az + b$ и, быть может, еще предварительной симметрии относительно прямой: $z \overset{p}{\mapsto} a\bar{z} + b$ (здесь a и b — комплексные числа, $|a| = k$, $\bar{z} = x - iy$ — сопряженное к $z = x + iy$; см. статью «Мнимые числа и геометрические задачи», «Квант» №3, 1973, с. 22). В первом случае неподвижная точка находится как решение уравнения

$$z_0 = az_0 + b \Rightarrow z_0 = \frac{b}{1-a} = \frac{b+\bar{a}b}{1-k^2},$$

во втором — как решение системы уравнений

$$\begin{cases} z_0 = a\bar{z}_0 + b \\ \bar{z}_0 = \bar{a}z_0 + \bar{b} \end{cases} \Rightarrow z_0 = \frac{b + a\bar{b}}{1 - a\bar{a}} = \frac{b + a\bar{b}}{1-k^2}.$$

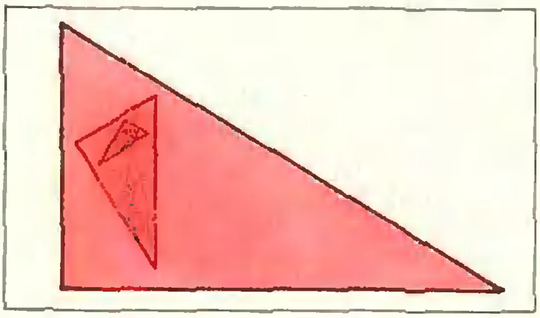


Рис. 5.

Нетрудно проверить, что найденная точка z_0 плоскости неподвижна при преобразовании p. В обоих случаях ясно, что z_0 не может оказаться вне фигуры Z: если расстояние ρ от z_0 до ближайшей к ней точки $z_1 \in Z$ было бы положительным, то расстояние от z_0 до $p(z_1)$ было бы равно $k\rho < \rho$, и $p(z_1)$ не могла бы принадлежать Z, хотя по условию $p(Z) \subset Z$.

Конечно, теорему о существовании неподвижной точки у преобразования подобия (с коэффициентом $k < 1$) можно доказать и чисто геометрически — без использования предельных переходов и комплексных чисел. Предоставляем сделать это читателям (см., например, книгу «Геометрические преобразования», ч. I, серия «Библиотека математического кружка», Гостехиздат, 1955).

И. Б. Васильев

M196. *В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд. Докажите, что если каждый диаметр пересекает не более k хорд, то сумма длин хорд меньше πk.*

Предложим, что сумма длин проведенных хорд не меньше πk. Тогда сумма малых дуг окружности, стягиваемых этими хордами, больше πk. Добавим к этим дугам дуги, симметричные им относительно центра окружности. Сумма всех дуг больше $2\pi k$. Поэтому найдется точка окружности, покрытая хотя бы $k+1$ дугой (длина окружности равна 2π). Если провести диаметр через эту точку, то она пересечет по крайней мере $k+1$ хорду.

А. Т. Колотов

M197. *В прямоугольную таблицу из m строк и n столбцов записаны mn произвольных положительных чисел. Найдем произведение чисел в каждом столбце и затем сумму S всех n таких произведений. Докажите, что если переставить числа в каждой строке в порядке возрастания, то сумма S для новой таблицы будет не меньше, чем в первоначальной. (На рисунке 6 приведен один пример ситуации, описанной в задаче; здесь $m = 3$, $n = 4$.)*

Решите эту задачу:

а) для $m = n = 2$ (для таблицы 2×2);

1	5	6	2
4	3	7	2
1	2	1	2
4	30	42	8

$S = 84$

1	2	5	6
2	3	4	7
1	1	2	2
2	6	40	84

$S = 132$

Рис. 6.

−1	−2
−2	−1
−1	2
−2	4

$S = 2$

−2	−1
−2	−1
−1	2
−4	2

$S = -2$

Рис. 7.

б) для $m = 2$ и произвольного n (для таблицы из двух строк);

в) для любых натуральных m и n.*

Рассмотрим сразу общий случай — таблицу с m строками и n столбцами. Докажем, что при упорядочении строк сумма произведений не уменьшится. Доказательство будем вести индукцией по числу столбцов таблицы. Если в таблице один столбец, то утверждение задачи очевидно. Пусть для таблиц с $n-1$ столбцом утверждение задачи верно. Докажем его для таблицы из n столбцов.

Обозначим через Π_i произведение чисел в i-м столбце. Переставим теперь столбцы так (это не изменит сумму произведений), чтобы произведение Π_1 стало минимальным. Обозначим через x_{ij} число, стоящее в i-й строке и j-м столбце. Предположим, что x_{i1} — не минимальное число в i-й строке и что минимальным является x_{ik}. Поменяем местами x_{i1} и x_{ik} и проверим, что сумма произведений при этом возрастет. Обозначим через $\hat{\Pi}_1$ произведение всех чисел в первом столбце, кроме x_{i1}, через $\hat{\Pi}_k$ — произведение всех чисел в k-м столбце, кроме x_{ik}. Разность новой и старой сумм равна

$$x_{i1}\hat{\Pi}_k + x_{ik}\hat{\Pi}_1 - x_{i1}\hat{\Pi}_1 - x_{ik}\hat{\Pi}_k = (x_{i1} - x_{ik})\cdot(\hat{\Pi}_k - \hat{\Pi}_1).$$

Но эта величина положительна, так как $x_{i1} > x_{ik}$ и $\hat{\Pi}_k > \hat{\Pi}_1$, поскольку $x_{ik}\hat{\Pi}_k \geq x_{i1}\hat{\Pi}_1$. Значит, после перестановки сумма увеличилась. Кроме того, очевидно, что произведение Π_1 новых чисел в первом столбце по-прежнему минимально. Поэтому если какое-то число x_{i1} не минимально в своей строке, мы можем поменять его местами с минимальным и при этом сумма увеличится. Таким образом, мы можем переставить все числа, минимальные в строках, в первый столбец, и сумма произведений увеличится.

Воспользуемся теперь индуктивным предположением. Очевидно, если упорядочить строки в таблице, образованной столбцами со 2-го по n-й, то мы получим исходную таблицу с упорядоченными строками. По предположению индукции при этом упорядочении сумма произведений $\Pi_2 + \ldots + \Pi_n$ не уменьшится. Следовательно, сумма $\Pi_1 + \ldots + \Pi_n$ в первоначальной таблице не больше, чем аналогичная сумма в таблице с упорядоченными строками. Решение задачи закончено.

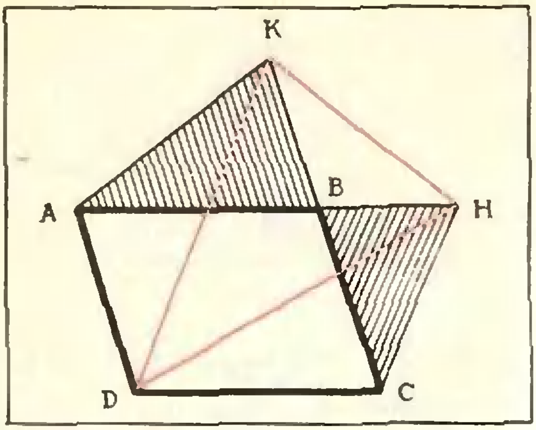


Рис. 8.

Примечания 1. Заметим, что при перемене мест чисел, которую мы производим, сумма произведений строго увеличивается. Отсюда следует, что сумма произведений равна максимальной в том и только в том случае, когда таблица получается из таблицы с упорядоченными строками путем перестановки столбцов.

2. Если не предполагать, что в таблице стоят положительные числа, то утверждение неверно. Простейшим примером может служить таблица 2×3 (рис. 7).

Б. М. Макаревич

М198. *Дан параллелограмм $ABCD$. На прямых AB и BC выбраны точки соответственно H и K так, что треугольники KAB и HCB равнобедренные ($KA = AB$ и $HC = CB$ (рис. 8)). Докажите, что треугольник KDH — тоже равнобедренный.*

Это совсем простая задача. Рассмотрим треугольники AKD и CDH. Они равны, поскольку $AD = CH$, $AK = DC$ и $\angle DAK = \angle DCH$ (см. рис. 9, *а*, *б*, *в*). Поэтому длины отрезков KD и DH одинаковы. Легко убедиться и в том, что треугольники KDH, AKB и BHC подобны (сделайте это).

В. Л. Гутенмахер

М199. *а) Докажите, что сумма*

$$C_n^0 - C_{n-1}^1 \frac{1}{4} + C_{n-2}^2 \frac{1}{4^2} - \ldots + (-1)^i C_{n-i}^i \frac{1}{4^i} + \ldots,$$

(сумма берется по всем целым i, $0 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}$) равна $\frac{n+1}{2^n}$.

б) Докажите, что если p и q — различные числа и $p + q = 1$, то сумма*

$$C_n^0 - C_{n-1}^1 pq + C_{n-2}^2 p^2q^2 - \ldots + (-1)^i C_{n-i}^i p^i q^i + \ldots,$$

аналогичная предыдущей, равна

$$\frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$$

при произвольном n.

Здесь C_n^k — биномиальные коэффициенты, то есть $C_n^0 = 1$ и $C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$. (О числах C_n^k рассказывалось в «Кванте» № 2 за этот год.)

Задача а) является частным случаем задачи б). Действительно, если заменить $\frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$ на $p^n + p^{n-1}q + \ldots + pq^{n-1} + q^n$, а потом подставить $p = q = \frac{1}{2}$, то мы получим $\frac{n+1}{2^n}$.

Поэтому решим сразу задачу б).

Пусть $C_n^0 - C_{n-1}^1 pq + \ldots = S_n$. Тогда

$$S_{n+1} - S_n = \Sigma(-1)^i \left(C_{n+1-i}^i - C_{n-i}^i\right) p^i q^i = \Sigma(-1)^i C_{n-i}^{i-1} p^i q^i =$$

$$= -pq\,\Sigma(-1)^{i-1} C_{n-1-(i-1)}^{i-1} p^{i-1} \times q^{i-1} = -pqS_{n-1}.$$

Итак, $S_{n+1} = S_n - pqS_{n-1}$.

Воспользуемся теперь математической индукцией. Предположим, что формула $S_n = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$ доказана для всех $n \leqslant k$.

Тогда

$$S_{k+1} = S_k - pqS_{k-1} = \frac{p^{k+1} - q^{k+1} - pq(p^k - q^k)}{p - q} =$$

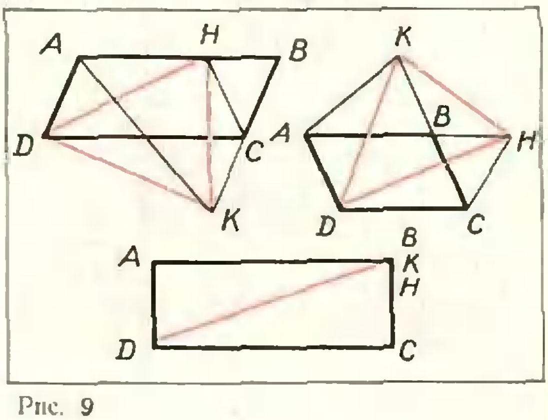


Рис. 9

$$= \frac{p^{k+1}(1-q) - q^{k+1}(1-p)}{p-q} = \frac{p^{k+2} - q^{k+2}}{p-q}$$

(напомним, что $p+q=1$).

Остается проверить базу индукции. При $n=0$ $S_n=1$ и $\frac{p-q}{p-q}=1$ — формула верна.

При $n=1$ $S_n=1$, а $\frac{p^2-q^2}{p-q}=p+q=1$ — формула снова верна.

Таким образом, и индуктивный шаг и база индукции проверены. Следовательно, формула справедлива при всех n.

Замечание. В нашем решении мы пользовались тем, что $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$. Выведите это соотношение самостоятельно из формулы для C_n^k, приведенной в условии задачи.

Л. Г. Лиманов

Почти все читатели, приславшие решения задач **М190—М199**, успешно справились с задачами **М191**, **М198**. Мы получили более 150 правильных решений задачи **М196**. Правильные решения остальных задач прислали (жирная цифра после фамилии — последняя цифра номера решенной задачи): *С. Абрамов* (Москва) **7**; *С. Агеев* (Воронеж) **2**; *Д. Азов* (Челябинск) **2**; *Ю. Акутин* (Москва) **5**; *П. Баньковский* (Уральск) **7**; *А. Бараов* (Старый Урух КБАССР) **7**; *Е. Башкиров* (Минск) **2, 7**; *А. Берлин* (Бобруйск) **2, 7**; *А. Блох* (Харьков) **2, 4, 7, 9**; *А. Бузанов* (Днепропетровск) **2**; *А. Вайновский* (Баку) **2**; *А. Вальков* (Ташкент) **2, 7, 9**; *А. Васищев* (Ставрополь) **7**; *Р. Вассерман* (Одесса) **9**; *С. Вилкомир* (Москва) **2**; *А. Волков* (Челябинск) **3**; *В. Гаврин* (Ковылкино Морд. АССР) **2, 7**; *А. Гончаров* (Никополь) **2**; *А. Григорян* (Баку) **0, 2, 4, 7, 9**; *С. Грищенко* (ст. Ленинградская Краснодарского края) **7**; *С. Гродский* (Корсунь—Шевченковский) **7**; *Е. Гусев* (Павлоград) **2, 7, 9**; *Г. Гутин* (Клинцы Брянской обл.) **2, 4, 7, 9**; *А. Дадиомов* (Ленинград) **2, 4**; *К. Данильченко* (Волгоград) **2, 9**; *П. Дедик* (Москва) **7**; *В. Дупцов* (Душанбе) **7**; *А. Еременко* (Харьков) **2, 9**; *К. Ефимов* (Челябинск) **2**; *А. Жданов* (Славянск—на—Кубани) **2**; *А. Журавлев* (Москва) **2, 7**; *М. Закс* (Пермь) **2**; *А. Заславский* (Калинин) **7, 9**; *В. Карапетян* (Севан) **2, 9**; *Д. Карпов* (Павлоград) **7, 9**; *М. Кац* (Кишинев) **7**; *И. Кирова* (Болгария) **2**; *Л. Клименок* (Москва) **7**; *Ю. Князикин* (Таллин) **7**; *М. Кобозев* (Киев) **9**; *К. Козел* (Польша) **0**; *С. Конягин* (Саратов) **0**; *В. Кошарный* (Волоногорск Днепропетровской обл.) **4, 7**; *А. Кукуш* (Киев) **4**; *Р. Купиец* (Польша) **0**; *А. Курляндчик* (Ленинград) **2, 4**; *Г. Левант* (Фрунзе) **2**; *Д. Лифшиц* (Кутаиси) **7**; *М. Любич* (Харьков) **0, 7**; *А. Макаричев* (Львов) **2—4, 7, 9**; *Г. Малашонок* (Львов) **2, 7**; *Д. Мамедов* (Дивичи Азерб. ССР) **9**; *С. Мельник* (Харьков) **2**; *Д. Мостовой* (Грозный) **3**; *Г. Мустафаев* (Сиазань) **9**; *В. Нападов* (Харьков) **2, 4**; *А. Николаев* (Москва) **0**; *С. Нужный* (Куйбышев) **2, 4**; *М. Осипов* (Москва) **7**; *И. Панин* (Апатиты) **2**; *В. Паньков* (Минск) **0, 3, 5, 7**; *П. Парамонов* (Москва) **5, 7**; *Е. Парилис* (Ташкент) **7, 9**; *Е. Пасик* (Харьков) **2, 3, 4, 7, 9**; *В. Перевалов* (Комсомольск—на—Амуре) **2**; *В. Прунис* (Москва) **2**; *А. Разгуляев* (Клин) **7**; *А. Райнин* (Москва) **0**; *А. Резников* (Киев) **2, 4**; *С. Родионов* (Саратов) **9**; *Р. Рожков* (Рязань) **2, 7**; *Ф. Рожков* (Рязань) **2, 7**; *Б. Розенштейн* (Каменец—Подольский) **7**; *А. Рязанов* (Н.-Кузнецк Кемеровской обл.) **7**; *Г. Самородницкий* (Нежин) **2**; *В. Сац* (Киев) **2**; *А. Сахаров* (Ярославль) **7**; *Г. Скляр* (Харьков) **7, 9**; *В. Слепой* (Фрунзе) **3**; *Б. Слепченко* (Челябинск) **7**; *А. Слесаренко* (Рубцовск Алтайского края) **2, 4**; *А. Слинкин* (Москва) **0, 2, 4, 7, 9**; *И. Слуцкий* (Минск) **2**; *Я. Сойбельман* (Киев) **2**; *К. Стемиак* (Польша) **2, 3**; *С. Табачников* (Москва) **0, 2—5, 7, 9**; *В. Ткаченко* (Киев) **7**; *Э. Туркевич* (Черновцы) **0, 2—4, 7, 9**; *С. Фомин* (Ленинград); **2, 3**; *С. Церковный* (Ленинград) **7**; *Н. Чекрыжов* (Набережные Челны) **3**; *А. Черебатов* (Омск) **2, 3, 7**; *Н. Чернов* (Кривой Рог) **2, 3, 7, 9**; *А. Шерстюк* (Николаев) **0, 7, 9**; *В. Шляков* (Харьков) **2, 3**; *Ю. Шмелев* (Ярославль) **2, 3, 4, 7**; *Н. Щербина* (Днепропетровск) **0, 2—4, 7, 9**; *А. Щехорский* (с. Старики Житомирской обл.) **9**; *Р. Юлмухаметов* (д. Иткулово Башк. АССР) **7**; *И. Юнус* (Харьков) **2, 7, 9**.

Ю. П. Лысов

Ф208. *У автомобиля, участвующего в гонке, лопается шина. Оценить, с какой скоростью должен ехать автомобиль, чтобы шина не сминалась.*

Будем считать, что автомобиль движется равномерно и без проскальзывания, и рассмотрим, какие силы действуют на участок шины одного колеса, который соприкасается с дорогой. В инерциальной системе координат, связанной с центром колеса, этот участок шины движется по окружности радиуса R (радиус колеса) с линейной скоростью, равной по величине скорости автомобиля v. Центростремительное ускорение этого участка равно $a_ц = \frac{v^2}{R}$.

Какие силы действуют на такой участок шины (назовем его «ведущим»)? Если пренебречь деформацией шины и связанными с нею силами, то на ведущий участок действует только одна сила — сила реакции дороги N.

(Сила тяжести mg, действующая на этот участок, много меньше N, и ею можно пренебречь).

Так как у обычных автомобилей 4 колеса,

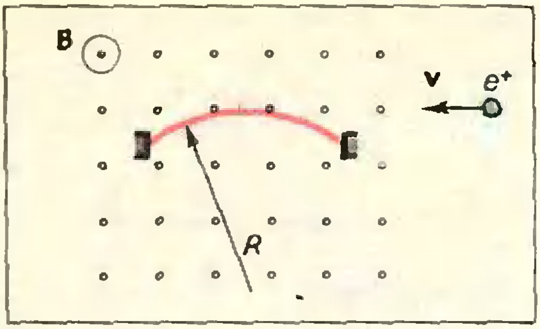


Рис. 10.

то эта сила (в среднем) равна $N = \frac{1}{4} Mg$,

где M — масса автомобиля. Ускорение, сообщаемое ведущему участку шины массы m силой N, и есть центростремительное ускорение, то есть

$$\frac{1}{4} Mg = m \frac{v^2}{R}. \qquad (1)$$

Так как левая часть равенства (1) постоянна (для данного автомобиля), то условия $R = \text{const}$ (условие несминаемости шины) и, как следствие, $m = \text{const}$ однозначно определяют необходимую скорость:

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{m} gR}. \qquad (2)$$

Для получения количественной оценки подставим в эту формулу следующие значения: $g = 10$ *м/с*^{2}, $R = 0{,}5$ *м*, $M = 2 \cdot 10^3$ *кг*. Величину m нужно оценить. Масса шины порядка 30 *кг*, а с дорогой соприкасается ее небольшой участок. Будем считать, что его длина $l = 10$ *см*. Тогда

$$m = m_ш \cdot \frac{l}{2\pi R} \approx 30 \cdot \frac{10}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5} \approx 1 \text{ (кг)}$$

(мы считаем, что радиус сечения шины мал по сравнению с радиусом колеса).

Подставив теперь все эти величины в формулу (2), получим

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2000}{1} \cdot 10 \cdot 0{,}5} = 50 \text{ м/с} = 180 \text{ км/ч}.$$

Для гоночного автомобиля эта скорость совсем невелика.

Ф209. *Смоделировать траекторию заряженной частицы в магнитном поле можно, поместив в однородное магнитное поле закрепленный на концах гибкий проводник, по которому пропускается ток. Каким будет натяжение такого провода при токе 1 а, если он имитирует траекторию движения протона с энергией 1 Мэв, влетающего в магнитное поле перпендикулярно магнитным силовым линиям?*

Траектория движения протона, влетающего в магнитное поле перпендикулярно магнитным силовым линиям, — окружность. Следовательно, провод, концы которого закреплены, располагается по окружности (или по дуге окружности; рис. 10).

Выделим маленький элемент провода длины Δl (такой, что его можно считать прямолинейным) и посмотрим, какие силы на него действуют. Со стороны поля действует сила

$$F = IB\Delta l,$$

перпендикулярная элементу Δl (рис. 11). Со стороны прилегающих участков действуют силы $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ натяжения проволоки ($|\mathbf{T}_1| = |\mathbf{T}_2| = T$). Так как рассматриваемый элемент проволоки находится в равновесии, то равнодействующая сил $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ должна быть по абсолютной величине равна силе F, то есть

$$2T \sin \frac{\alpha}{2} = IB\Delta l;$$

отсюда

$$T = \frac{1}{2} \frac{IB\Delta l}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Но $\Delta l = \alpha R$, где R — радиус окружности, которую представляет проволока. Кроме того, так как элемент проволоки мы взяли малым (по сравнению с R), то угол α мал и

$$\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому

$$T = \frac{1}{2} \frac{IBR\alpha}{\frac{\alpha}{2}} = IBR.$$

Итак, для того чтобы найти T, нужно определить R.

Протон в магнитном поле движется по окружности под действием силы Лоренца

$$F = evB$$

(v — скорость протона, e — его заряд). Эта сила сообщает протону центростремительное

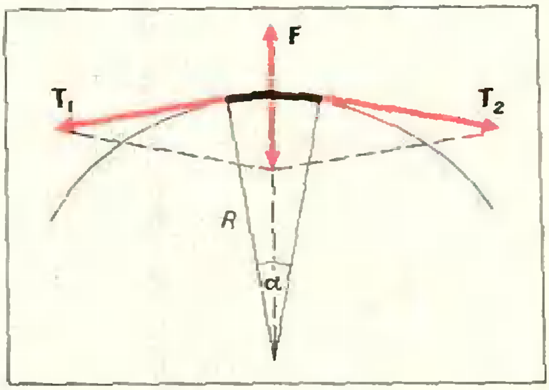


Рис. 11.

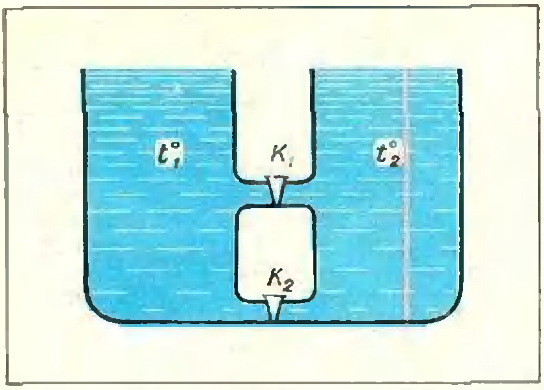


Рис. 12.

ускорение

$$a = \frac{v^2}{R},$$

то есть

$$evB = m\frac{v^2}{R},$$

или

$$BR = \frac{mv}{e} = \frac{1}{e}\sqrt{2\frac{m^2v^2}{2}} = \frac{1}{e}\sqrt{2m\frac{mv^2}{2}}.$$

Так как $\frac{mv^2}{2} = W$ — кинетическая энергия протона, то $BR = \frac{1}{e}\sqrt{2mW}$.

Таким образом, $T = \frac{l}{e}\sqrt{2mW}$.

Подставляя в эту формулу $l = 1$ *м*, $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ *к*, $m = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ *кг*, $W = 1$ *Мэв* $= 1{,}6\cdot 10^{-13}$ *дж*, найдем

$$T = \frac{1}{1{,}6\cdot 10^{-19}}\sqrt{2\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-13}} \approx \approx 14\ (н).$$

Ф210. *Два одинаковых открытых сосуда соединены двумя одинаковыми трубками и доверху заполнены водой. Трубки закрыты кранами K_1 и K_2 (рис. 12). Температура воды в сосудах поддерживается постоянной, причем $t_1^\circ > t_2^\circ > 4^\circ$ С. Что будет происходить с водой в сосудах, если сначала открыть кран K_2, а затем (при открытом кране K_2) открыть кран K_1?*

После открывания крана K_2 сосуды станут сообщающимися. Поэтому в них установятся такие уровни воды, при которых давления в нижних точках сосудов будут одинаковыми (иначе жидкость перетекала бы из одного сосуда в другой):

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$$

(ρ_1, ρ_2 — плотности воды в сосудах с температурами соответственно t_1° и t_2°, h_1 и h_2 — соответствующие уровни воды).

Так как $t_1^\circ > t_2^\circ > 4^\circ$ С, то $\rho_1 < \rho_2$. Это означает, что $h_1 > h_2$, то есть вода перетечет из правого сосуда в левый и часть ее выльется.

Что будет происходить с водой при открывании крана K_1, зависит от соотношения между давлениями воды в сосудах на уровне трубки. А так как давление линейно связано с высотой уровня и $h_1 > h_2$, то на любом уровне $0 < h < h_1$ давление в левом сосуде больше, чем в правом (рис. 13). Следовательно, $p_1(h_0) > p_2(h_0)$. Поэтому, когда мы откроем кран K_1, вода начнет перетекать по верхней трубке из левого сосуда в правый. При этом давление внизу в правом сосуде будет увеличиваться, а в левом — уменьшаться. Благодаря этому в нижней трубке появится поток воды из правого сосуда в левый.

Эта задача имеет прямое отношение к технике. Батареи водяного отопления подсоединяют к одной трубе, и тем не менее вода циркулирует по такой батарее, а не просто течет по трубе, не заходя в батарею.

И. Ш. Слободецкий

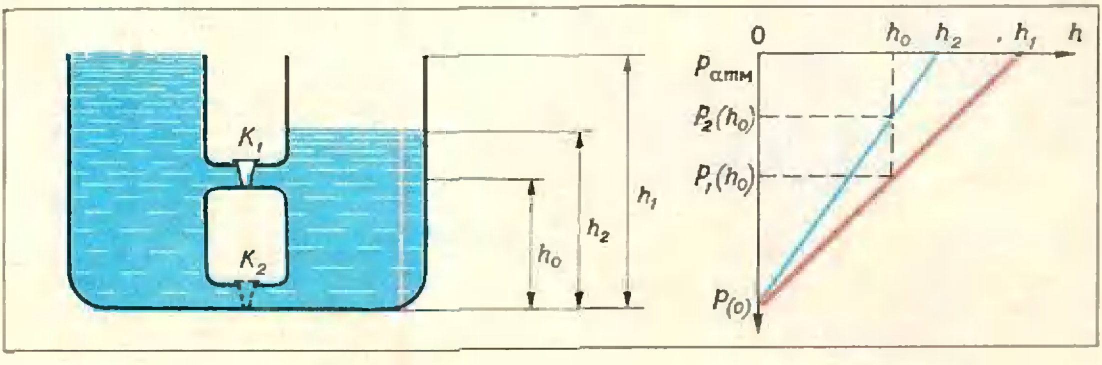


Рис. 13.

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф203—Ф210**, успешно справились с задачами **Ф203**, **Ф204**, **Ф207**, **Ф210**. Правильные решения остальных задач прислали (жирная цифра после фамилии означает последнюю цифру номера задачи): *С. Актершев* (Магнитогорск) **8**; *Д. Алексеев* (Москва) **6**; *С. Алехин* (Липецк) **9**; *П. Анциферов* (Фатеж Курской обл.) **9**; *Р. Басыров* (Н. Каракитяны ТАССР) **9**; *В. Бенхан* (Калинин) **7**; *М. Берман* (Капустин Яр Астраханской обл.) **3**; *Л. Брагинский* (Фрунзе) **5**; *Ю. Бриль* (Днепропетровск) **8**; *П. Бухаринов* (Березники Пермской обл.) **8**; *М. Валюнин* (Баку) **8**, **9**; *О. Василенко* (Изюм Харьковской обл.) **5**; *М. Васнецов* (Киев) **9**; *Ю. Визгин* (Ленинград) **9**; *А. Герман* (Воронеж) **9**; *С. Гончаров* (Никополь Днепропетровской обл.) **8**; *А. Гуревич* (Минск) **9**; *В. Дунцов* (Душанбе) **9**; *В. Дяченко* (Гадяч Полтавской обл.) **5**; *В. Игнатьев* (Волгоград) **5**; *А. Калошин* (Москва) **9**; *М. Кангиев* (Самарканд) **6**; *С. Карпенко* (Киев) **8**, **9**; *Д. Карпов* (Павлоград) **8**; *М. Качановский* (д. Вишневичи Брестской обл.) **6**, **9**; *Л. Коган* (Черновцы) **8**; *С. Корнилов* (Грозный) **8**, **9**; *В. Корошков* (Калининград Московской обл.) **8**; *Л. Кофман* (Таллин) **9**; *Г. Коява* (Цхинвали) **7**; *А. Креницкий* (Энгельс) **8**; *А. Куцман* (Черновцы) **8**; *И. Куцык* (Ярославль) **6**, **9**; *А. Лодман* (Ташкент) **6**; *В. Лысенко* (Сосновка Львовской обл.) **6**; *А. Малаков* (Нижний Тагил) **9**; *А. Мальцев* (Свердловск) **9**; *В. Малюский* (Краматорск Донецкой обл.) **6**; *Г. Мамедов* (Баку) **8**; *В. Миранов* (Раменское Московской обл.) **6**; *О. Марьин* (Пермь) **9**; *Н. Миронов* (Выксы Горьковской обл.) **9**; *А. Муринец* (Магнитогорск) **8**; *А. Николаев* (Москва) **5**, **8**; *Р. Оспанов* (Байрат-Али Туркм. ССР) **8**; *С. Пак* (Ташкент) **8**; *А. Паровичников* (Обнинск) **8**; *Ю. Пинелис* (Кзыл-Орда) **5**; *А. Поблагуев* (Винница) **6**; *А. Полянский* (Челябинск) **8**; *Н. Попов* (Ленинград) **9**; *В. Пшеничников* (с. Ключевка Оренбургской обл.) **9**; *А. Ремеев* (Ташкент) **6**; *В. Решетняк* (Киев) **8**; *Л. Ридицер* (Харьков) **5**; *М. Румянский* (Магнитогорск) **9**; *Е. Сандер* (Тармакла Омской обл.) **9**; *А. Саттаров* (В. Чукаено ТАССР) **8**; *А. Сергеев* (Подольск Московской обл.) **9**; *Я. Симкин* (Москва) **8**; *А. Синьсовский* (Душанбе) **9**; *Р. Сирота* (Харьков) **8**; *В. Скрипкин* (Мантурово Костромской обл.) **5**; *Ю. Смоленцов* (Ессентуки) **9**; *В. Спиридонов* (ст. Маршиновка Николаевской обл.) **8**; *В. Суслопаров* (Кунгур Пермской обл.) **6**; *Ч. Тариеердиев* (Сназан Аз. ССР) **6**; *Н. Федин* (Омск), **5**, **8**; *Е. Федоров* (Магнитогорск) **8**; *Н. Филимонов* (Лида Гродненской обл.) **8**; *Д. Фушман* (Черновцы) **9**; *В. Хацыловский* (Красноярск) **6**; *М. Хорошин* (Чернигов) **8**; *В. Чернышов* (Пензенская обл.) **9**; *В. Чернобай* (Долинск Сахалинской обл.) **9**; *С. Шевчук* (Староконстантинов Хмельницкой обл.) **9**; *Е. Шафирович* (Ногинск Московской обл.) **8**; *А. Яблонский* (Волгоград) **8**, **9**.

Р. Г. Минц

Раскраска плоскости

Есть задачи, которые легко формулируются, но оказываются настолько трудными, что их решение становится в математике событием. И не только из-за сложности этих задач, а скорее из-за их огромного значения для развития целых отраслей математики. К задачам такого типа относится несколько проблем, связанных с раскрашиванием плоскости. Вот одна из таких задач.

Раскрасить плоскость минимальным количеством различных красок так, чтобы концы любого отрезка длины 1 были окрашены в разные цвета.

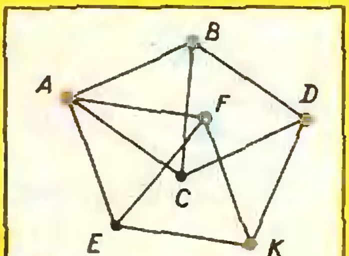


Рис. 1.

Эта задача была впервые поставлена более 20 лет назад, но до сих пор еще полностью не решена. За это время удалось доказать, что для решения задачи трех различных цветов не хватит. Это легко увидеть из рисунка 1. Каждый отрезок на нем имеет длину 1. Теперь представьте себе, что этот чертеж помещен на плоскости, раскрашенной необходимым образом только тремя цветами. Если точка A окрашена, скажем, в красный цвет, то точки B и C должны быть окрашены в другие цвета, и тогда D снова должна быть красной. Точно так же F и E должны быть окрашены в разные цвета, отличные от красного, а K — обязательно красная.

(Окончание см. с. 45)

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ПОИСК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Я.И.Груденов

Для отыскания решения многих задач применяют метод попеременного движения с двух сторон — от данных задачи к искомому и обратно. Сначала стараются получить ряд следствий из данных, а затем — такие утверждения, из которых следовало бы искомое, далее опять возвращаются к данным и так далее.

Вообще говоря, из данных задачи можно получить много следствий, не имеющих никакого отношения к ее решению. Однако чаще всего мы подсознательно останавливаемся именно на тех из них, которые можно связать с искомым, так как наше внимание только что фиксировалось на нем или на утверждениях, из которых оно следует. То же самое происходит при движении от искомого к данным.

Попеременное движение с двух сторон целесообразно осуществлять до тех пор, пока не возникнет идея решения (одна или несколько). Иногда кажется, что она появляется неожиданно. На самом деле она является результатом кропотливой работы по сближению искомого с данными. Это наглядно можно проследить по схеме (рис. 1), на которой путь решения проходит через утверждения 1, 2, 3 и 4.

Рассмотрим пример.

З а д а ч а 1. *Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе.*

И з у ч а е м у с л о в и е. Выполняем чертеж (рис. 2), некоторые углы обозначаем цифрами. Выделяем данные ($\angle ABC = 90^\circ$, $BO \perp AC$, $AM = MC$, $\angle ABK = \angle KBC$) и искомое (доказать, что $\angle 2 = \angle 3$). Заодно проверяем, что расположение элементов на рисунке 2 — единственно возможное (биссектриса лежит между медианой и высотой); это легко доказывается с использованием середины дуги AC описанной около ΔABC окружности.

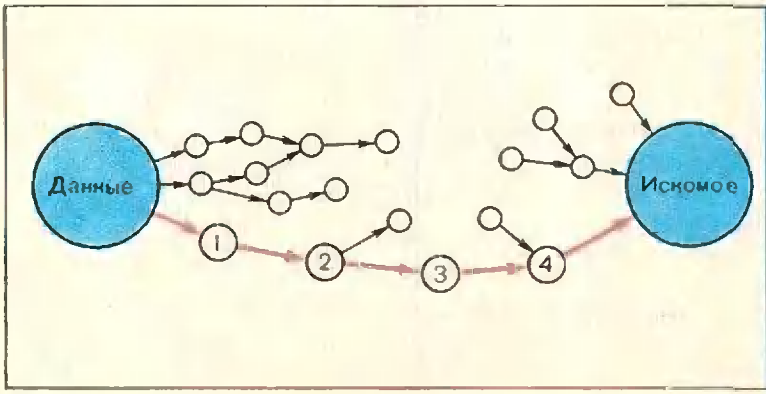


Рис. 1.

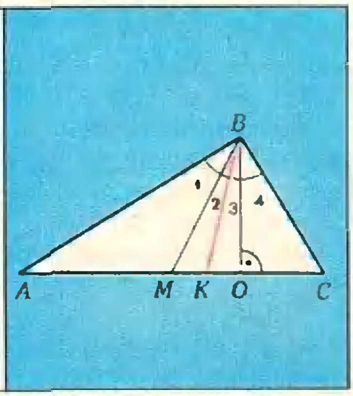


Рис. 2.

Отправляемся от искомого. Так как $\angle ABK = \angle KBC$, то для доказательства равенства $\angle 2 = \angle 3$ достаточно доказать, что $\angle 1 = \angle 4$. Для этого можно сравнить по величине $\angle 1$ и $\angle 4$ с другими углами. Посмотрим, не равны ли $\angle A$ и $\angle 1$. Это возможно, если $AM = MB$.

Получаем следствия из данных. Так как MB — медиана, проведенная к гипотенузе в прямоугольном треугольнике ABC, то $MB = \frac{1}{2}AC$, то есть $MB = AM$, а значит $\angle A = \angle 1$.

Возвращаемся к доказываемому соотношению. Так как $\angle A = \angle 1$, то можно доказывать равенство $\angle A = \angle 4$.

Возвращаемся к данным. Так как $BO \perp AC$ и $BC \perp AB$, то $\angle A = \angle 4$, как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Отсюда $\angle 1 = \angle 4$, а значит, $\angle 2 = \angle 3$.

Если решить задачу попеременным движением с двух сторон не удается, можно обратиться к другим методам. Например, решить задачу в частном случае. Вспомнить, не встречалась ли аналогичная задача, нельзя ли данную задачу свести к уже известной, к более простой задаче, не облегчается ли поиск решения, если учитывать только часть данных.

Задача 2. *Вычислить*

$$M = \sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{200} - \underbrace{88\ldots8}_{100}}.$$

Изучаем условие. а) Надо извлечь корень квадратный из разности двух чисел; б) каждое из чисел содержит одинаковые цифры; в) уменьшаемое состоит из четверок, вычитаемое — из восьмерок; г) уменьшаемое содержит 200 цифр, вычитаемое — 100; д) в уменьшаемом цифр вдвое больше.

Вычислить эту разность не представляется возможным. Попробуем разложить ее на множители. Для этого рассмотрим сначала частный пример, составив его так, чтобы выполнялась только часть данных: (а), (б), (в), (д) (кроме (г)).

1) $4444 - 88 = 4 \cdot 1111 - 8 \cdot 11 = 4 \cdot (1111 - 2 \cdot 11) = 4 \cdot (1100 + 11 - 11 - 11) = 4\,(11 \cdot 100 - 11) = 4 \cdot 11 \cdot (100-1) = 4 \cdot 11 \cdot 99 = 4 \cdot (11)^2 \cdot 9.$

2) $4444 - 88 = (4400 + 44) - (44 + 44) = 44 \cdot 100 - 44 = 44\,(100 - 1) = 44 \cdot 99 = 4 \cdot (11)^2 \cdot 9.$

Любой из этих способов можно применить к решению данной задачи; выбираем второй:

$$M = \sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{100}\cdot 10^{100} - \underbrace{44\ldots4}_{100}} = \sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{100}\cdot(10^{100}-1)} = \sqrt{4\cdot\underbrace{11\ldots1}_{100}\cdot 9\cdot\underbrace{11\ldots1}_{100}} = \underbrace{66\ldots6}_{100}.$$

При решении планиметрических задач полезно иногда выполнить чертеж не от руки, а более точно, с помощью инструментов. Рассматривая его, можно избавиться от некоторых заблуждений, найти истинные соотношения между элементами фигуры. Разумеется, полученные таким путем выводы обязательно обосновываются.

Задача 3 (софизм, то есть рассуждение, в котором преднамеренно допускают ошибку, которую надо найти). *Пусть в четырехугольнике $ABCK$ (рис. 3) $\angle K = 90°$, $\angle C > 90°$ и $BC = AK$. Через середины сторон AB и CK проведем перпендикуляры к ним. Точку их пересечения O соединим со всеми вершинами четырехугольника. Из попарно равных прямоугольных треугольников KOM и MOC, AOP и BOP имеем:*

$$OK = OC,\ OA = OB;$$

$$\angle OKM = \angle OCM. \quad (1)$$

Так как $AK = BC$, $OA = OB$ и $OK = OC$, то $\Delta AOK = \Delta OBC$. Отсюда

$$\angle AKO = \angle BCO. \quad (2)$$

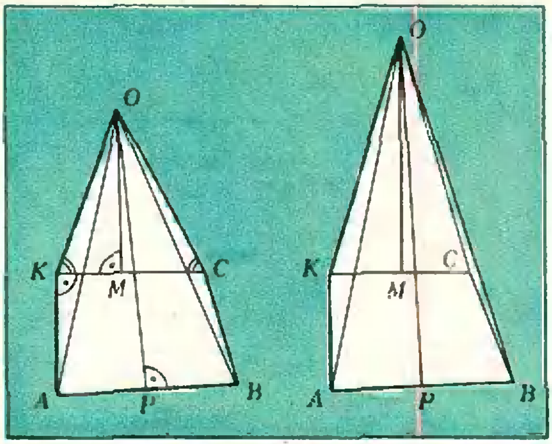


Рис. 3. Рис. 4.

Вычитая почленно из равенства (2) *равенство* (1), *получаем* $\angle AKM = \angle BCM$, *то есть прямой угол равен тупому.*

Здесь сразу бросается в глаза, что в рассуждении используется чертеж: считается, что точка O находится вне четырехугольника. Но она может находиться и на стороне KC или внутри четырехугольника. Проверяем эти случаи и приходим к тому же абсурдному выводу.

Выполняем тогда чертеж с помощью инструментов возможно точнее (рис. 4). Из чертежа видно, что точки O и K расположены по разные стороны от прямой BC. Убедитесь, что в этом случае рассуждения не приводят к нелепости, и методом от противного докажите, что это — единственно возможное расположение элементов, соответствующих данным задачи.

При поиске решения обычно сначала обнаруживается далеко не самый короткий путь. Поэтому полезно проверить, нельзя ли сократить рассуждение, упростить или совсем опустить отдельные промежуточные преобразования.

Закончив всю эту работу, целесообразно отметить те моменты, которые больше всего затрудняли поиск решения, постараться запомнить установленные в процессе решения и ранее неизвестные или забытые теоремы. Такая работа сказывается при решении следующих задач, когда эти теоремы возникают в сознании именно в нужный момент.

Рассмотренные рекомендации собраны ниже в таблицу. Указания, помещенные в ней, не надо заучивать. Достаточно в процессе решения нескольких задач выборочно их читать и выполнять.

Применим этот метод к решению следующих задач.

Задача 4. *В квадрате $ABCT$ из точки T, как из центра, радиусом, равным стороне, проведена дуга окружности AC. На AT, как на диаметре, внутри квадрата построена полуокружность. P — точка дуги AC; прямая PT пересекает полуокружность AT в точке K. Доказать, что длина отрезка PK равна расстоянию от точки P до стороны AB.*

Указание 1. Выполняем чертеж в соответствии с условием задачи и проводим $PE \perp AB$ (рис. 5). Надо доказать, что $PE = PK$.

Указание 2 а. Проведем отрезки AP и AK. Надо доказать, что $\Delta APE = \Delta APK$.

Указание 2 б. Вписанный $\angle AKT$ опирается на диаметр и $PE \perp AB$, поэтому треугольники APE и APK — прямоугольные с общей гипотенузой AP.

Указание 2 а. Остается доказать, например, равенство $\alpha = \beta$.

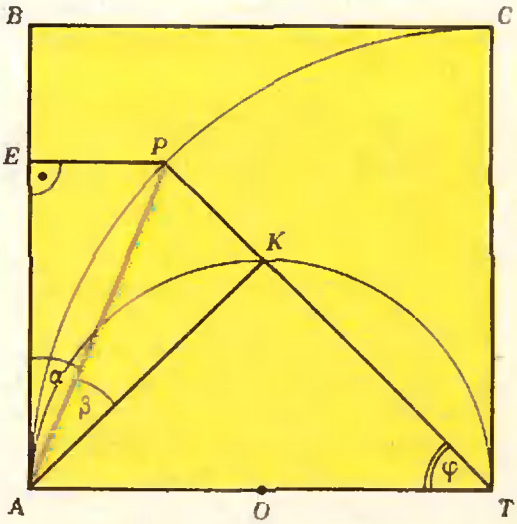


Рис. 5.

Таблица

Указания	Дополнительные указания
1. Ознакомиться с задачей.	а) Выполнить чертеж, рисунок. Проанализировать все возможные расположения фигур. б) Выделить данные и искомое. в) Вспомнить признаки и свойства понятий.
2. Попеременно двигаясь от искомого к данным и от данных к искомому, искать связь между ними.	а) Искомое заменить такими утверждениями, из которых оно следует. б) Получать следствия из данных. в) Использовать все данные.
3. В случае затруднений обращаться к дополнительным указаниям: 3а, 3б, 3в и т. д.	а) Вспомнить задачу, аналогичную данной. Воспользоваться способом ее решения. б) Изменить условие задачи (временно учитывать только часть данных, заменить искомое и т. д.). в) Решить задачу в частном случае. г) Выполнить с помощью инструментов более точный чертеж, составить модель. Наблюдением выявить свойства фигур. Обосновать полученные выводы.
4. Изложить найденное решение, обосновывая каждый его шаг. Завершить работу над задачей.	а) Попытаться сократить рассуждения или найти другой, более простой способ решения. б) Сделать проверку. в) Запомнить те использованные при решении теоремы, которые были ранее неизвестны или забыты.

Рассмотрим для этого $\angle ATK = \varphi$.

Указание 2б. $AB \perp AT$ и центры обоих окружностей лежат на AT, поэтому AB — касательная к обоим окружностям в точке A. $\angle EAP = \alpha$ образован касательной AB и хордой AP, на дугу AP опирается центральный угол φ, следовательно, $2\alpha = \varphi$.

Для полуокружности AKT: $\angle ATK = \varphi$ и $\angle EAK = \alpha + \beta$. Они также измеряются (каждый) $\frac{1}{2} \smile AK$ (объясните почему). Поэтому $\alpha + \beta = \varphi$, откуда $\alpha + \beta = 2\alpha$, то есть $\beta = \alpha$. Отсюда $\Delta APE = \Delta APK$ и $PE = PK$.

Задача 5. *Площадь треугольника ABC равна S. Найти площадь треугольника, стороны которого равны медианам данного треугольника.*

Указание 1. Пусть ABC — данный треугольник, AE, BM и CK — его медианы, S — площадь (рис. 6). Построим треугольник KPC, одной из сторон которого будет медиана KC, а две другие — равны медианам BM и AE. Надо найти, следовательно, площадь треугольника KPC (и выяснить, когда такой треугольник существует).

Указание 1а. Из чертежа замечаем, что $KP \parallel BM$, $CP \parallel AE$, EP проходит через точку M и $EP \parallel AB$. Если это так, то решение должно упроститься.

Указание 2б. Проводим прямую EM и откладываем $MP = EM$, тогда $EM = BK$ и $EM \parallel BK$, поэтому $BK = MP$ и $BK \parallel MP$, $BKPM$ — параллелограмм! Аналогично рассматривается CP. Половина дела сделана — ΔKCP построен.

Указание 2а. $S_{\Delta KPC}$ можно найти, если знать площадь меньшего, но подобного ему треугольника, скажем $\triangle KOT$. Во сколько раз он меньше $\triangle KPC$?

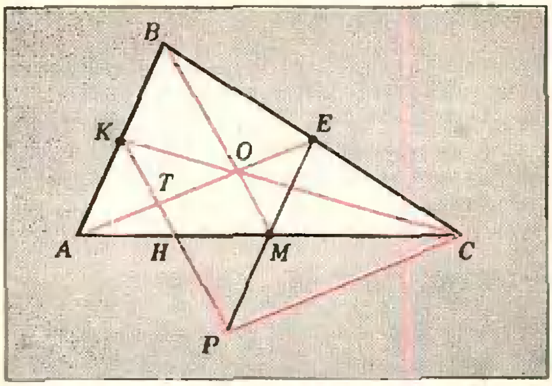


Рис. 6.

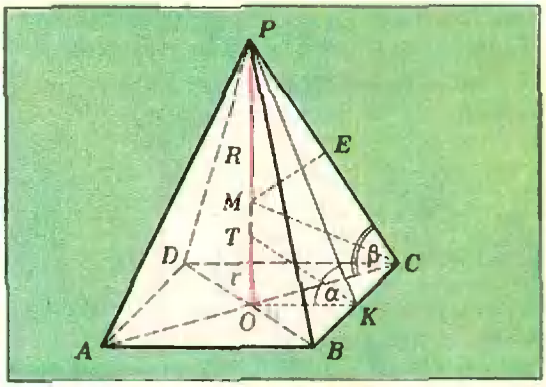


Рис. 7.

Указание 2б. $KO = \frac{1}{3}KC$, поэтому $S_{\Delta KPC} = 9S_{\Delta KOT}$.

Указание 2а. $OT = TA = OE$, поэтому $S_{\Delta KOT} = \frac{1}{2}S_{\Delta AKO}$, $S_{\Delta AKO} = \frac{1}{2}S_{\Delta AOB}$, $CK = 3 \cdot OK$, поэтому $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{3}S$. Окончательно,

$$S_{\Delta KCP} = 9S_{\Delta KOT} = \frac{9}{2}S_{\Delta AKO} = \frac{9}{4}S_{\Delta AOB} = \frac{3}{4}S.$$

Задача 6. *Доказать, что* $\frac{R}{r} \geqslant \sqrt{2}+1$, *где* R *— радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды,* r *— радиус шара, вписанного в эту пирамиду.*

Указание 1. Пусть $PABCD$ — правильная пирамида, PO — ее высота (рис. 7). Тогда центр T вписанного в пирамиду шара лежит на ее высоте, а центр M описанного около нее шара — на высоте или на ее продолжении.

Указание 2а. Чтобы при доказательстве неравенства $\frac{R}{r} \geqslant \sqrt{2}+1$ использовать данные задачи, выразим R и r через элементы пирамиды. Это проще сделать, если один элемент будет линейный, второй — угол. Пусть $BC = a$, $\angle PKO = \alpha$, где K — середина CB, $\angle PCO = \beta$. Замечаем, что R и r легче выразить через a и α, чем через a и β.

Указание 2б. T — центр шара, вписанного в правильную пирамиду, а $\angle PKO$ — линейный угол двугранного угла BC, поэтому TK — биссектриса угла OKP и

$$r = OT = \frac{a}{2}\cdot \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Указание 2а. Чтобы найти $R = MP = MC = MB = \ldots$, можно провести $ME \perp PC$ и рассмотреть подобные треугольники PME и POC. А для этого надо найти PC, OP и

$$PE = \frac{1}{2}CP.$$

Указание 2б. $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $OP = \frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Поэтому из $\Delta\,OPC$ получим $PC = \frac{a}{2}\sqrt{2+\mathrm{tg}^2\alpha}$. Тогда

$$PE = \frac{a}{4}\sqrt{2+\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Из подобия треугольников OPC и MPE имеем: $\frac{PM}{PE} = \frac{PC}{OP}$, $PM = \frac{PE\cdot PC}{PO}$. Подставляя значения PE, PC и PO, получаем

$$R = PM = \frac{(2+\mathrm{tg}^2\alpha)\cdot a}{4\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Следовательно,

$$\frac{R}{r} = \frac{2+\mathrm{tg}^2\alpha}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}.$$

Указание 2а. Исходное неравенство содержало два параметра: R и r. Использовав данные задачи, мы заменили его неравенством

$$\frac{2+\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\geqslant\sqrt{2}+1,$$

в котором можно перейти к $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, то есть к одному только параметру, а значит, его легче будет доказать.

Указание 2б. Преобразовав левую часть последнего неравенства, получаем

$$\frac{1+\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}\geqslant\sqrt{2}+1.$$

Обозначаем $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=x$, доказываемое неравенство принимает вид

$$\frac{1+x^2}{2x(1-x)}\geqslant\sqrt{2}+1.$$

Указание 2а. Для доказательства неравенства достаточно показать, что

$$A=\frac{1+x^2}{2x(1-x)}-(\sqrt{2}+1)\geqslant 0.$$

Указание 2б.

$$A=\frac{1+x^2-2x\sqrt{2}-2x+2\sqrt{2}x^2+2x^2}{2(1-x)x}=$$

$$=\frac{(3+2\sqrt{2})x^2-2(1+\sqrt{2})x+1}{2x(1-x)}.$$

Дискриминант квадратного трехчлена в числителе равен нулю (проверьте) и $3+2\sqrt{2}>0$. Следовательно, трехчлен неотрицателен.

Указание 2а. Если удастся показать, что знаменатель дроби $2x\times\times(1-x)$ положителен, то задача будет решена.

Указание 2б. $x=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$, но $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$, откуда $0<\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}<1$, то есть $0<x<1$, $1-x>0$. Значит, $A\geqslant 0$ и неравенство $\frac{R}{r}\geqslant\sqrt{2}+1$ доказано.

Упражнения

1. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина AD, $BC=2AB$, E — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на AB. Доказать, что $\angle EMD=3\angle AEM$.

2. Около треугольника ABC описана окружность. Доказать, что угол между диаметром этой окружности CM и высотой треугольника CK равен $|\angle A-\angle B|$.

3. Доказать, что $\frac{n}{12}+\frac{n^2}{8}+\frac{n^3}{24}$ является целым числом при любом четном n.

4. Стороны параллелограмма равны a и b. Вычислить диагонали четырехугольника, образованного пересечением биссектрис внутренних углов этого параллелограмма.

5. Построить треугольник ABC по стороне b, радиусу R описанной окружности и медиане m_c.

6. Две грани треугольной пирамиды — равнобедренные прямоугольные треугольники с общей гипотенузой AB. Двугранный угол при AB равен α. Найти двугранный угол, у которого ребро есть катет.

7. Найти объем пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной a, если двугранные углы между плоскостью основания и боковыми гранями равны α, β, γ.

8. Найти все пятизначные числа вида $\overline{34x5y}$, делящиеся на 36.

9. Доказать, что $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{243}$ можно представить в виде $a\sqrt{3}-b\sqrt{2}$, где a и b — целые числа, причем $3a^2-2b^2=1$.

Телевидение готовит в вуз

Физика

На телезанятиях отделения физики в декабре рассматриваются темы: «Жидкости и газы» и «Газовые законы». Читателям журнала предлагается несколько задач по этим темам.

1. В цилиндрическом сосуде диаметра $d = 30$ *см*, заполненном водой, плавает кусок льда со свинцовой пластинкой массы $m = 3$ *кг*. Определить, насколько изменится уровень воды в сосуде после таяния льда.

2. В сообщающиеся сосуды с внутренними диаметрами $d_1 = 4$ *см* и $d_2 = 6$ *см* налита вода до высоты $H = 30$ *см*. Определить давление на высоте $h = 5$ *см* после того, как в сосуд с меньшим диаметром долили $V = 130$ *см*^{3} масла, плотность которого $\rho = 800$ *кг/м*^{3}.

3. В баллоне объемом $V_1 = 400$ *см*^{3} под давлением $p_1 = 380$ *мм рт. ст.* находится водород. В другом баллоне объемом $V_2 = 500$ *см*^{3} находится кислород под давлением $p_2 = 800$ *мм рт. ст.* Температура в обоих баллонах 22° С. Баллоны соединили. После того, как газ перемешали и образовавшаяся гремучая смесь была взорвана с помощью электрической искры, в баллонах установилась первоначальная температура. Каково давление в баллонах?

Математика

На отделении математики в декабре изучается планиметрия. Для самостоятельного решения читателям предлагаются следующие задачи.

1. Длины сторон параллелограмма равны a и $3a$; острый угол между диагоналями равен β. Найти площадь параллелограмма.

2. Дан треугольник ABC, в котором $\angle B = 30°$, $AB = 4$ *см*, $BC = 6$ *см*. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Определить площадь треугольника ABD.

3. В треугольнике ABC $AB = BC$, O — точка пересечения высот. Найти угол при вершине B, если $OB = AC$.

4. Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно a, угол при основании равен α. Найти длину отрезка прямой, проходящей через вершину A и центр O описанной окружности, заключенного между точкой A и прямой, проходящей через точки B и C.

А. Н. Борзяк,
В. И. Давыдов,
П. Т. Дыбов,
И. И. Наслузов

Раскраска плоскости

(Окончание. Начало см. с. 38)

В таком случае точки D и K, расстояние между которыми равно 1, обе окрашены в красный цвет. Таким образом, данный чертеж доказывает, что раскрашивать плоскость нужно, по крайней мере, четырьмя различными цветами. Но как это сделать? Вот семью красками плоскость можно раскрасить так, чтобы наше условие выполнялось. Доказательство приведено на рисунке 2. Посмотрите на него внимательно. Вы видите часть плоскости, заполненную правильными шестиугольниками.

Рис. 2

Каждый из них окрашен определенным цветом, а расстояние между противоположными вершинами шестиугольника чуть меньше 1. Подобным образом (повторяя цвета) легко раскрасить всю плоскость. Вы сами можете убедиться, что на такой плоскости любые две точки, расстояние между которыми равно 1, будут находиться в разноцветных шестиугольниках, расположенных рядом. Ну, а раскрасить подобным образом плоскость четырьмя, пятью или шестью цветами или доказать, что этого сделать нельзя, пока никто не умеет.

Может быть, вы попробуете?

ПОЛИГОН ЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Л. Новикова, В. Стрельцов

В мае 1973 года состоялась юбилейная сессия Малой Академии Наук школьников Крыма («Искатель»), которой в этом году исполнилось 10 лет.
МАН — первое в нашей стране крупное объединение учащихся, увлекающихся наукой и техникой, учащихся, стремящихся углубить знания, получаемые в школе. В МАН работают не только секции математики, физики, химии, астрономии и биологии, соответствующие школьным учебным дисциплинам, но и археологическая, инженерно-техническая секция, секции журналистики, кибернетики и другие. Занятия в них проводят сотрудники шефствующих над МАН научно-исследовательских институтов АН УССР и различных вузов.
Наиболее активные участники астрономических и археологических экспедиций, победители олимпиад по математике, физике, химии, биологии, географии и кибернетике (в МАН уже проведены четыре областные олимпиады по кибернетике) избираются кандидатами и действительными членами МАН. Почетные звания следует систематически поддерживать творческими взносами — ими обычно являются результаты наблюдений над животными, рефераты по истории, новое, самостоятельно сконструированное устройство или успех на олимпиаде.
Мысль, дерзание, творчество и труд — тебе, любимая родина; эти слова являются девизом МАН, под этим девизом она получила аттестат зрелости и продолжает свою жизнь.
Чтобы подробнее ознакомиться с МАН, лучше всего изучить Устав «Искателя», который каждый может получить, написав письмо по адресу: *Симферополь, п/я 52, МАН «Искатель».*
Наиболее интересные работы юных исследователей из «Искателя» нередко публикуются в различных журналах. Так, в прошлом году на страницах «Кванта» была помещена статья «Машина Поста», написанная школьницами из Бахчисарая, членами секции кибернетики МАН («Квант», 1972, № 5).
Читателям предлагается описание еще одного оригинального учебного пособия, разработанного членами МАН.

Во многих наших школах учащиеся знакомятся с элементами математической логики. Чаще всего применение математической логики для школьников иллюстрируется использованием ее для решения логических задач. О том, как это делается, подробно рассказывалось в статье Л. Л. Цинмана «Логические задачи и алгебра высказываний» («Квант», 1971, № 4).

Однако не менее интересно применять математическую логику при конструировании простейших логических устройств.

В нашей школе юных кибернетиков мы уже много лет пользуемся для этого специальным наглядным пособием — «Полигоном логических структур». О том, как устроен этот полигон и что с его помощью можно собрать, рассказывается в этой статье.

Полигон состоит из логических элементов типа «И», «ИЛИ» и «НЕ», изготовленных на базе электромагнитных реле.

Условные обозначения этих элементов приведены на рисунке 1. Элемент «И» служит для получения значений *логического произведения.* На входы элемента (они обозначены буквами A и B) подаются значения истинности каждого из двух сомножителей, а на выходе получается результат логического умножения.

Элемент «ИЛИ» служит для *логического суммирования* значений A и B. Элемент «НЕ» на своем выходе дает *отрицание* истинности значения A.

Полная характеристика работы этих элементов задается таблицами, которые совпадают с таблицами истинности логических операций «И», «ИЛИ» и «НЕ».

Электрические схемы элементов приведены на рисунке 2.

Нажатие любой из кнопок в любом из элементов вызывает подачу тока в обмотку

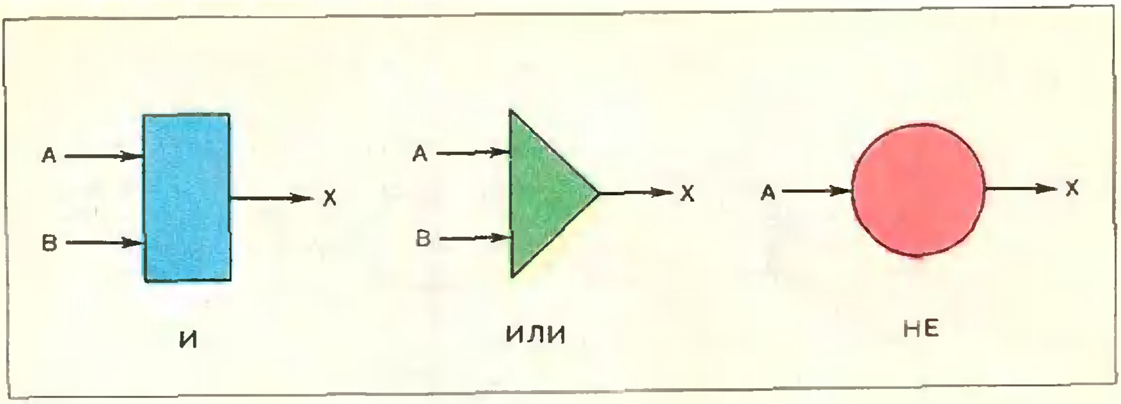


Рис. 1.

«И»

A	B	$X = AB$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

«ИЛИ»

A	B	$X = A + B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

«НЕ»

A	$X = \overline{A}$
1	0
0	1

реле, и соответствующие контакты замыкаются (в элементе «НЕ» контакты в этом случае размыкаются).

Если вы нажмете кнопку, то на вход будет подан сигнал «1» (положительный потенциал), и до тех пор, пока кнопка остается нажатой, этот сигнал на входе элемента удерживается. Если кнопка не нажата, то это означает, что на вход элемента подан сигнал «0». Появление положительного потенциала от источника тока на выходе любого из элементов означает, что на выходе имеется сигнал «1», в противном случае — сигнал «0».

В а ж н о е з а м е ч а н и е. Выход любого из элементов можно соединять со входом любого другого, образуя цепочки или структуры элементов. Такие структуры часто называются *комбинационными схемами*.

Примером может служить комбинационная схема, изображенная на рисунке 3.

Читатель может убедиться в том, что значения сигналов, обнаруживаемые на выходе X, соответствуют значениям следующего высказывания X:

$$X = A\,(B + C).$$

В нашем полигоне соединение элементов друг с другом осуществлять очень легко, так

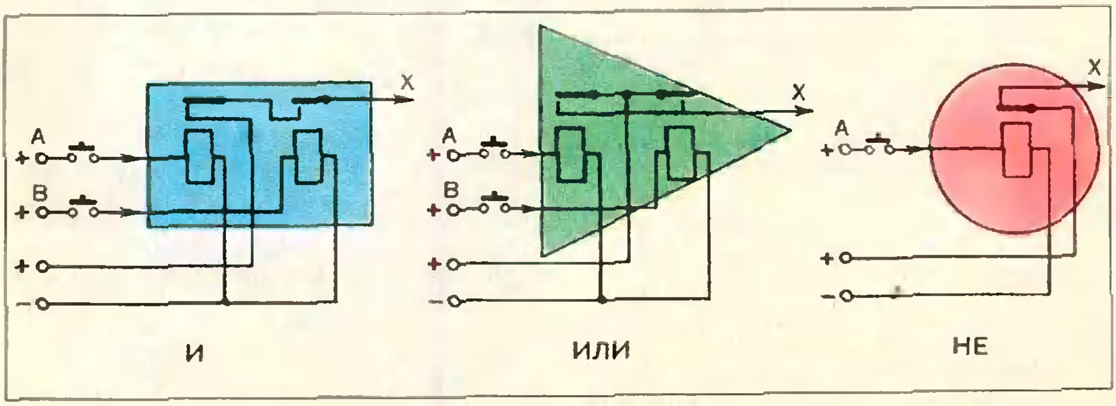


Рис. 2.

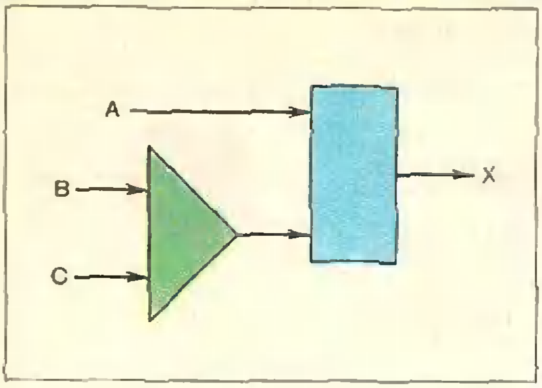


Рис. 3.

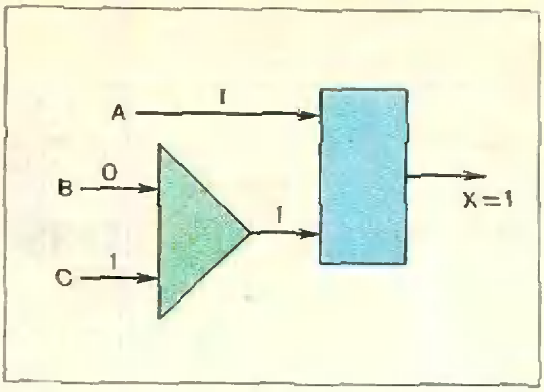


Рис. 4.

как входы и выходы каждого элемента выведены на лицевую панель в виде гнезд.

Соединение их друг с другом осуществляется с помощью шнуров с наконечниками.

Вот пример небольшой задачи, которую можно решить, используя полигон.

Задача. *Для проведения состязаний по поднятию тяжестей было задумано изготовить транспарант с текстом «ВЕС ВЗЯТ ПРАВИЛЬНО». Эта надпись должна подсвечиваться, если трое спортивных судей А (он является старшим судьей), В и С придут к выводу, что вес взят правильно. Свое решение они сообщают, нажав на кнопку (этим самым они посылают сигнал «1» в автомат, управляющий освещением транспаранта). Транспарант должен загораться еще в двух случаях, а именно, если двое судей (один из них обязательно старший) считают, что вес взят правильно. Всякое другое распределение мнений судей не должно вызывать подсвечивания транспаранта.*

Ясно, что автомат должен иметь три входа, на которые будут поступать сигналы от судей, и один выход, на котором будет вырабатываться сигнал на включение транспаранта.

Легко получить структурную формулу автомата:

$$X = ABC + A\overline{B}C + AB\overline{C}. \qquad (1)$$

Действительно, транспарант должен быть включен, если все трое судей или двое из них (и обязательно один из двоих — старший) пошлют сигнал «1».

Воспользуемся сведениями из уже упоминавшейся нами статьи Л. Л. Цинмана и преобразуем формулу (1):

$$X = ABC + A\overline{B}C + AB\overline{C} = AB + AC = A(B + C).$$

По этой формуле следует строить функциональную схему автомата. Получится схема, приведенная на рисунке 3.

Убедитесь в этом, рассмотрев все варианты решений судей. Один из вариантов показан на рисунке 4.

Приведем несколько задач на конструирование схем на «Полигоне логических структур».

1. Как изменится схема автомата «Спортивный судья», сконструированного выше, если транспарант «вес взят правильно» должен подсвечиваться при согласии любых двух из трех работающих судей?

2. Вычертите функциональную схему из описанных логических элементов «И», «ИЛИ», «НЕ» автомата, который сумеет сложить два любых одноразрядных двоичных числа (такой автомат называют полусумматором).

3. Вычертите функциональную схему умножителя двух двухразрядных двоичных чисел.

4. Вычертите функциональную схему, с помощью которой можно проследить за справедливостью знаменитых в математической логике формул А. де Моргана:

$$\overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B},$$
$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}.$$

Наш читатель ученик восьмого класса Юра Соркин прислал нам изящное решение задачи **М167** (см. «Квант» № 6, 1973)

Легко видеть, что бесконечное множество чисел

$$a\,(1 + d)^m \qquad (*)$$

при $m = 1, 2, 3, \ldots$ имеет одни и те же простые множители в разложении каждого из них, и ясно также (воспользуйтесь биномом Ньютона), что все числа (*) являются членами заданной арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d.

IV математическая олимпиада МЭСИ

Московский экономико-статистический институт в настоящее время занимает ведущее положение в стране по подготовке специалистов по машинной обработке информации и по применению математических методов в экономике. Вот почему математика играет для поступающих в МЭСИ особо важную роль. Последние три года вступительные экзамены по математике и физике принимает электронно-вычислительная машина «Минск-32». В этом году МЭСИ 4-й раз проводит математическую олимпиаду для школьников.

Олимпиада проводится в 2 тура: I тур — заочный и II — очный.

К участию во II очном туре, который будет проводится в МЭСИ, будут допущены школьники, успешно справившиеся с задачами I тура и приславшие решения не позднее 25 января 1974 года (по штемпелю почты). Каждый участник олимпиады, допущенный ко II туру, будет извещен об этом. Чтобы ускорить получение ответа из института, приложите к письму конверт с написанным на нем своим адресом. Успехи в олимпиаде будут учтены при поступлении в наш институт.

Адрес МЭСИ: 119435, *Москва, Б. Саввинский пер.*, 14, *«Олимпиада-74»*.

Решения задач выполняйте на русском языке в ученической тетради. Проверка всех работ, представленных на олимпиаду, будет производиться ЭВМ. Поэтому просим в конце тетради поместить ответы к задачам, заполнив следующую таблицу

Номера задач	1	2	3	4	5
Ответы					

Задачи I тура

1. Найти остаток от деления числа $1973^5 - 1973$ на 1680.

2. Вычислить без таблиц

$$3\operatorname{ctg}^6 80^\circ - 27\operatorname{ctg}^4 80^\circ + 33\operatorname{ctg}^2 80^\circ$$

3. Найти сумму действительных корней уравнения

$$x^4 - 8x^2 - 3200x = 159984.$$

4. В четырехугольнике $ABCD$ проведена окружность с центром в середине стороны AD и касающаяся трех других сторон. Найти сторону AD, если $AB = 12$ *см*, $CD = 75$ *см*.

5. Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный 4,2 *см* и перпендикуляр на боковую грань, равный 3 *см*. Найти объем пирамиды.

И. Г. Венецкий, Ю. И. Соркин

Математика на подготовительных отделениях вузов

С 1969 года при высших учебных заведениях в соответствии с Постановлением ЦК КПСС и Совета Министров СССР открыты подготовительные отделения для рабочей и сельской молодежи. Перед этими отделениями поставлена ответственная задача — обеспечить повышение уровня общеобразовательной подготовки молодых рабочих, колхозников, лиц, демобилизованных из рядов Советской Армии, создать у них прочный фундамент знаний для дальнейшего успешного обучения в вузе.

Сегодня мы публикуем статью старшего преподавателя математики подготовительного отделения Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова В. В. Александрова.

Математика является одной из основных дисциплин, которые изучают слушатели почти всех подготовительных отделений. Ведь без прочного знания курса математики невозможно успешно учиться на естественных факультетах университетов, в технических вузах, в институтах экономического профиля.

Изучение математики на подготовительных отделениях существенно отличается от изучения математики в средней школе или на подготовительных курсах. Отличие это состоит прежде всего в том, что на подготовительном отделении происходит *очное* обучение лиц с *законченным* средним образованием, имеющих *перерыв* (и иногда — значительный) в учебе, в весьма *сжатые сроки*.

Поэтому обучение математике на подготовительных отделениях заключается в комплексном повторении школьного курса, в воспитании активных знаний и творческого усвоения навыков оперирования с математическими объектами. Основной упор делается на те вопросы, глубокое и полное понимание которых является особенно важным при изучении высшей математики.

Едва ли требуется доказывать, что слушателям подготовительного отделения необходим *специальный* учебник. Он должен содержать четко и компактно написанный (с учетом всех особенностей подготовительного отделения) теоретический курс элементарной математики, богато иллюстрированный решениями типичных и поучительных задач, а также достаточное число разнообразных упражнений.

Слушателей подготовительных отделений можно условно разделить на две категории: а) физико-математическая (подготовительные группы механико-математических, физических факультетов и факультетов вычислительной математики университетов, факультетов прикладной математики технических вузов и некоторые другие); б) техническая (подготовительные группы других естественных факультетов университетов, технических и экономических вузов и другие). Естественно, что для каждой из этих категорий подготовительных групп нужен свой учебник математики.

К сожалению, специальных учебников для подготовительных отделений все еще нет. Слушателям приходится пользоваться школьными учебниками по математике и некоторыми пособиями для поступающих в вузы.

Уместно назвать здесь те пособия по элементарной математике, которые наилучшим образом зарекомендовали себя и нашли широкое применение в практике преподавания на подготовительных отделениях:

а) для физико-математического профиля

— В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин. Лекции и задачи по элементарной математике. М., «Наука», 1971;

— Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. Пособие по математике для поступающих в вузы. Избранные вопросы элементарной математики. М., «Наука», 1972;

б) для технического профиля

— В. В. Зайцев, В. В. Рыжков, М. И. Сканави. Элементарная математика (повторительный курс). М., «Наука» (готовится издание 1974 года);

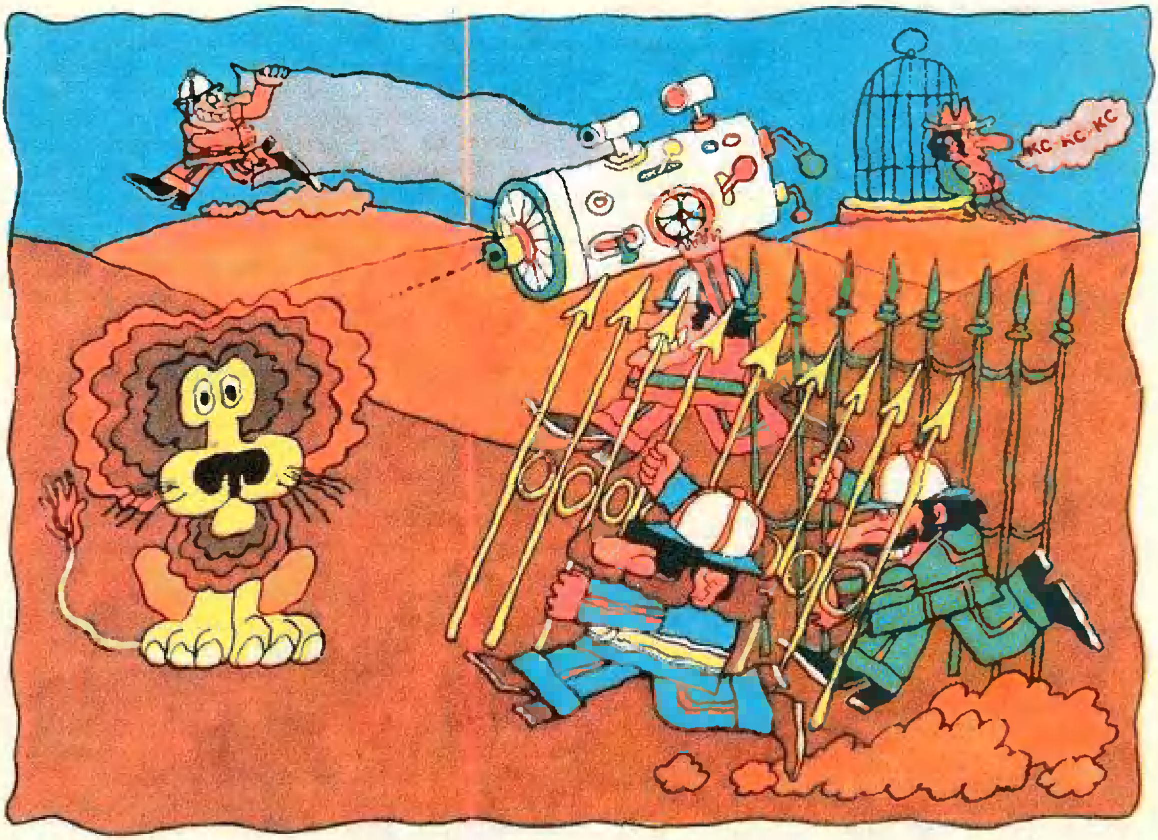
— М. И. Сканави и др. Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы. М., «Высшая школа», 1972.

Использование этих книг как *учебных пособий* для слушателей подготовительных отделений оказывается очень полезным. Однако следует иметь в виду, что ни одна из названных книг не писалась специально как учебник для подготовительных отделений.

В настоящее время различными издательствами издано большое число пособий по элементарной математике и сборников конкурсных задач, адресованных поступающим в вузы, учащимся подготовительных отделений. Уже само по себе такое изобилие пособий едва ли необходимо, тем более, что многие из этих пособий не имеют «собственного лица», лишены оригинальности, повторяют без каких-либо новинок уже известное. Нередко пособия содержат материал, явно не соответствующий действующей «Программе вступительных экзаменов по математике».

Совершенно недопустимым является то, что некоторые из пособий грешат явными методическими промахами и большим количеством грубых ошибок по существу. Журнал «Квант» уже обращал внимание на подобные факты (см. № 11 за 1970 год, № 10 за 1971 год, № 6 за 1972 год).

В. В. Александров



К теории охоты

(Как поймать льва в пустыне)

1. Рассекаем пустыню линией, проходящей с севера на юг. Лев находится либо в восточной части пустыни, либо в западной. Предположим для определенности, что он находится в западной части. Рассекаем ее линией, идущей с запада на восток. Лев находится либо в северной части, либо в южной. Предположим для определенности, что он находится в южной части, рассекаем ее линией, идущей с севера на юг. Продолжаем этот процесс до бесконечности, воздвигая после каждого шага крепкую решетку вдоль разграничительной линии. Площадь последовательно получаемых областей стремится к нулю, так что лев в конце концов оказывается окруженным решеткой произвольно малого периметра.

2. Отмечаем, что дикие львы в пустыне Сахара являются величинами ненаблюдаемыми. Следовательно, все наблюдаемые львы в пустыне Сахара — ручные. Поимку ручного льва предоставляем читателю в качестве самостоятельного упражнения.

3. В любом случае существует положительная, отличная от нуля вероятность, что лев сам окажется в клетке. Сидите и ждите.

4. Через пустыню натянем полупроницаемую мембрану, которая пропускает через себя все, кроме льва.

5. Облучим пустыню медленными нейтронами. Внутри льва будет наведена радиоактивность, и он начнет распадаться. Если подождать достаточно долго, лев не сможет оказать никакого сопротивления.

Наша почта

В нынешнем, 1973 году почта «Кванта» продолжала расти. Так, за первые 5 месяцев нынешнего года к нам пришло в 1,7 раза больше писем (4 тысячи), чем за такой же промежуток времени прошлого года.

Приятно отметить, что растет число писем, полученных от сельских школьников. Их общее число в три раза превышает количество писем, поступающих от московских школьников.

По-прежнему львиная доля писем (более 75% всей корреспонденции) приходится на «Задачник «Кванта». Почти все авторы поступающих к нам решений задач этого раздела — школьники (хотя есть и рабочие, желающие продолжить свое образование или просто узнать побольше о математике и физике; есть и студенты, которые увлеклись решением задач из «Задачника «Кванта», еще будучи школьниками, и остались преданными ему, инженеры и другие любители математики и физики), так что можно считать: задачи находят именно тех читателей, кому они адресованы. Уже своим активным и регулярным участием в работе журнала эти читатели нас информируют: задачи их привлекают, они могут использовать и используют «Квант» в качестве своеобразного самоучителя. Подтверждение тому мы находим и в письмах некоторых читателей и в ответах на анкету. Например, десятиклассник Михаил Ожигов со станции Поныри Курской области пишет нам, что регулярно решает задачи из «Задачника «Кванта», хотя решений и не присылает. Десятиклассник Андрей Софрин из Ленинграда пишет: «Задачи решаю почти систематически. Просматриваю по крайней мере все. Сопоставляю свое решение с приведенным». С ним солидаризуется десятиклассник Сергей Белолипецкий из г. Киржач Владимирской области.

Не все, конечно, сразу подбирают ключи к достаточно трудным и иногда сложным задачам из «Задачника «Кванта». Не сразу приходит уверенность в своих силах. Так, девятиклассники Андрей Погуляй из г. Уфы и Елена Калягина из г. Грозного пишут, что систематически решать задачи из этого раздела стали только в минувшем году. Не всем хватает времени, опыта или увлеченности, чтобы вникать в условия задач. Некоторые школьники «доросли» до них только к моменту, когда приходится отдавать все силы для успешного окончания средней школы и подготовке к поступлению в высшее учебное заведение. Но и среди тех читателей, кому задачи из «Задачника «Кванта» и сейчас кажутся слишком крепкими орешками, многие извлекают из них пользу, знакомясь с приводимыми в журнале решениями (об этом написал, например, десятиклассник Александр Буланович из поселка Косино Московской области). Некоторые читатели, главным образом, из числа тех, кто уже окончил среднюю школу, отдают явное предпочтение задачам по физике, как москвич Андрей Неволин, другие, как его земляк Михаил Жуков, — задачам по математике.

Помогает «Задачник «Кванта» и учителям в работе со школьниками. Об этом пишет, например, учительница математики Л. С. Котикова из г. Нелидово Калининской области. Учительница математики Н. А. Вохмянина из г. Котельнича Кировской области и учитель физики О. Т. Орловский из г. Красноярска пишут, что используют материалы «Задачника «Кванта» на факультативных занятиях.

Что привлекает читателей к задачам из «Задачника «Кванта»? Конечно, для школьника важную роль играет и перспектива участия в областной олимпиаде, на которое он получает право в случае успеха в конкурсе «Задачника «Кванта». Но главное в самих задачах и их особенностях. В «Задачнике «Кванта» помещаются, как правило, задачи, предлагавшиеся на олимпиадах или задачи «олимпиадного типа». Процедура решения такой задачи требует обычно от школьника активного и изобретательного применения минимальных знаний об условии задачи. Чтобы найти решение, оказывающееся после того, как оно найдено, неожиданно простым, требуется иногда затратить значительное усилие. При этом читатели «Кванта» оказываются в значительно более выгодном положении, чем участники олимпиады, которым нужно справиться с заданием в предельно сжатые сроки. Читатель располагает бо́льшим временем на решение задач.

Задачи из «Задачника «Кванта» составляются в расчете на то, чтобы помочь читателям журнала воспитать в себе качества, которые необходимы для активной научной работы. К таким качествам принадлежат изобретательность, то есть сочетание дерзости в догадках и скромности в выводах, любовь к научным изысканиям и умение самостоятельно работать. Задачи обычно ставятся так, что они допускают несколько подходов к решению, что помогает проявиться индивидуальности школьника и способствует развитию у него определенных задатков вкуса и стиля в методике работы. Наконец, неожиданность, свежесть полученных решений и романтика преодоления трудностей в сочетании с естественностью результатов доставляет читателю эстетическое удовлетворение от проделанной работы. Ведь многие школьники за годы обучения по старым учебникам и программам привыкли к тому, что задача, пусть даже повышенной трудности, является лишь упражнением для усвоения или укрепления в памяти теоретических положений. Между тем, решая олимпиадную задачу, школьники нередко сами строят и развивают небольшую теорию.

Очень многие из наших читателей благодарят «Квант» за статьи и задачи из раздела «Практикум абитуриента». Среди них десятиклассник Виктор Крыгин из г. Семипалатинска Казахской ССР, учителя математики М. Кулмуратов из совхоза «Минбулак» Тамдынского района Бухарской области Узбекской ССР и С. В. Жаворонкова из г. Кизыл-Арвата Туркменской ССР.

Из писем читателей нам известно, что многие считают научный уровень помещаемых в журнале материалов настолько высоким, что до него нелегко дотянуться. Хорошо ли это? Вот как ответил для себя на этот вопрос девятиклассник Василий Васильев из г. Воронежа: «Я считаю, что уровень помещаемого материала соответствует назначению журнала. К статье, которая недоступна сейчас, можно возвратиться через некоторое время». Десятиклассник Сергей Принцев из Кемерово, который мечтает стать математиком, уже констатирует определенный успех: «Вначале статьи были трудноваты, но потом я окреп. Сейчас все материалы доступны для меня». Студент-физик Воронежского государственного университета Анатолий Герман, который работал над «Квантом», будучи школьником, и продолжает с ним дружить, придерживается мнения: «Уровень изложения «Кванта» вполне доступен для тех, кто желает разобраться в интересующем их материале». Как бы в расчете на это восьмиклассник москвич Леонид Агапов пишет: «Я считаю, что мне еще расти и расти до уровня вашего журнала. Я постараюсь!»

Активность читателей можно усмотреть и в том, что все чаще они присылают на рассмотрение редакции собственные задачи и небольшие исследования. По математике, например, за первые пять месяцев нынешнего года таких писем около 240.

В этом году многие читатели сообщили нам свое мнение об оформлении «Кванта». Подавляющее большинство в ответе на вопрос анкеты — каковы ваши замечания и предложения относительно оформления журнала? — высказало удовлетворение. Доцент В. Е. Штепан из Красноярского политехнического института пишет: «Журнал имеет свой облик, отличающий его от других научно-популярных журналов. По-моему, примерно в таком виде его следует оформлять и в дальнейшем». Студент МГУ Валерий Гробовский считает: «Журнал оформляется со вкусом (не превращается ни в серый отчет, ни в разукрашенные картинки) и с некоторым, можно сказать, юмором и фантазией». А вот мнение двух школьников. Девятиклассник Владимир Хасаншин пишет: «Журнал оформлен оригинально. Хорошо, если бы были «смешинки», но занимали не слишком много места». Девятиклассница Лидия Башкатова из Воронежа считает: «Относительно оформления журнала можно сказать только положительное. Все иллюстрации четки и понятные. Большую роль, вероятно, играет в этом многоцветность». Мнение учительницы математики Н. Я. Бушминой из с. Бастан Михайловского района Алтайского края: «Оформление яркое и красочное. Пусть таким и останется». Не столь категоричен восьмиклассник Игорь Апальков из г. Саранска Мордовской АССР: «По-моему, журнал оформляется достаточно хорошо, хотя и несколько однообразно. Рисункам следует добавить романтики». Противоположной точки зрения придерживается десятиклассник Григорий Бейгельдруд из г. Артемовска Донецкой области УССР: «Не нравится чрезмерное обилие цветов. Хочется видеть больше чертежей с четкими, желательно разноцветными, в соответствии со смыслом, линиями. Предпочтительно, чтобы статья выглядела как научная, а не как популярная». Десятиклассник Анатолий Кутырев из Ступинского района Московской области считает: «Журнал в целом оформлен очень хорошо и красочно. Но хотелось, чтобы в нем было больше чертежей к наиболее трудным задачам».

Из более чем четырехсот вернувшихся с ответами читателей анкет, всего в двух содержится неудовлетворенность оформлением. Так, учитель физики В. А. Ганюшкин считает: «Мало выдумки в оформлении. Неяркие, непривлекательные заголовки. Мало хороших портретов ученых, очерк о которых помещен в данном журнале».

В письмах и ответах на вопросы анкеты содержится много пожеланий, которые редакция постарается учесть и за которые очень благодарна читателям.

К сожалению, очень немногие из школьников, участвующих в конкурсе «Задачника «Кванта», прислали нам ответы на анкету. Просим вас, дорогие участники конкурса, непременно на этот раз ответить на вопросы анкеты.

В. Н. Березин,
М. Л. Смолянский

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Гриша пошел с папой в тир. Уговор был такой: Гриша делает пять выстрелов и за каждое попадание в цель получает право сделать еще два выстрела. Всего Гриша сделал 17 выстрелов. Сколько раз Гриша попал в цель?

2. Почему грязный, покрытый копотью снег тает быстрее, чем чистый?

3. Сашина комната обладает таким свойством: если ее «поставить на бок» (на любую из боковых стен), то ее площадь не уменьшится. Высота потолка в комнате равна 3 метрам. Какова наибольшая возможная площадь такой комнаты?

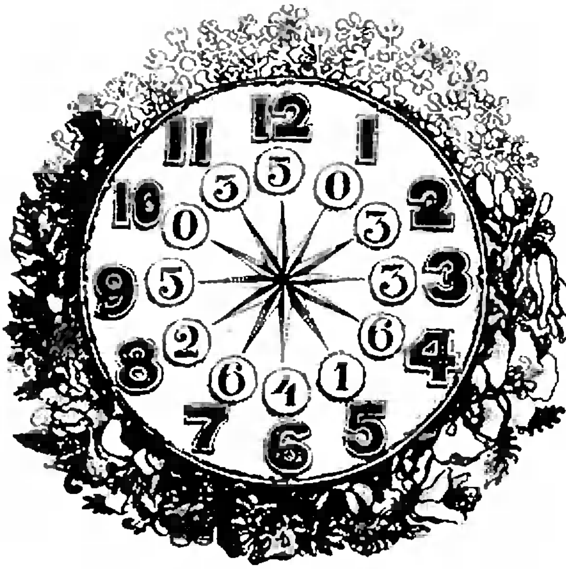
4 Металлический лист с дырочкой нагревают. Как меняется при этом размер дырочки?

5. В семье четверо детей, им 5, 8, 13 и 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера и Галя. Сколько лет каждому ребенку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори и сумма лет Ани и Веры делится на три?

6. Судно массы m переместилось вверх по течению реки, поднявшись при этом на высоту H. Нужно ли при вычислении работы, совершенной двигателем учитывать величину mgH?

Рисунки Э. Назарова.

Часы-календарь



Сделать эти часы очень просто. Нарисуйте на бумаге круг и впишите в него числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 и 12; рядом с каждым числом (ближе к центру) поставьте цифры в кружочках. На рисунке вы видите, как нужно располагать цифры. Вот календарь и готов. Как же им пользоваться?

Будем считать, что каждое число на циферблате — порядковый номер месяца:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
январь	февраль	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь

а порядковые номера—дней недели

1	2	3	4	5	6	7 (0)
понедельник	вторник	среда	четверг	пятница	суббота	воскресенье

Что же можно узнать с помощью этого календаря?

З а д а ч а 1. *Требуется узнать, какой день будет 5 декабря 1973 года.*

Декабрь — 12-й месяц. Против числа 12 на циферблате стоит цифра 5. Прибавьте к дате (5) число в кружочке (5): $5+5=10$. Полученную сумму делим на 7; в остатке вы получите 3; он и есть порядковый номер дня недели. Итак, 5 декабря — среда.

З а д а ч а 2. *Нужно узнать, в какой день недели Коля будет праздновать день своего рождения, если он родился 18 ноября.*

Ноябрь — 11-й месяц. Против числа 11 на циферблате стоит цифра 3. Прибавьте к дате (18) число в кружочке (3): $18+3=21$. Полученную сумму делим на 7. В остатке получается 0; он и показывает порядковый номер дня недели.

Значит, день рождения Коли — воскресенье.

З а д а ч а 3. *Какие числа соответствуют четвергам августа?*

К числам 0, 7, 14, 21 и 28 прибавляем порядковый номер дня недели (4), а затем вычитаем число, стоящее в кружочке против месяца (август — 2): $0+4-2=2$, $7+4-2=9$, $14+4-2=16$, $21+4-2=23$, $28+4-2=30$.

Следовательно, четверги приходятся на 2, 9, 16, 23, 30 августа.

З а д а ч а 4. *Занятия математического кружка в декабре назначены на понедельники. Определить числа, в которые будут происходить занятия.*

Порядковый номер дня недели — 1. В кружке против декабря стоит число 5. $0+1-5=-4$ (не подходит); $7+1-5=3$; $14+1-5=10$; $21+1-5=17$; $28+1-5=24$.

Занятия математического кружка состоятся 3, 10, 17 и 24 декабря.

А теперь составьте себе календарь на 1974 год. Кстати, нельзя ли получить его из календаря на 1973 год?

В. М. Розентуллер

Ответы, указания, решения

К статье «Тепловые машины»

1. 120 *дж*.
2. 100 *вт*.

К статье «Поиск решения задачи»

1. Опустите перпендикуляры из M на CE и из C на AD.

4. $|a-b|$.

5. Указание. Использовать теорему: «Геометрическое место середин хорд, исходящих из одной точки A окружности с центром O, есть окружность, построенная на AO, как на диаметре».

6. Указание. Если за основание пирамиды принять прямоугольный треугольник, то следует рассмотреть два случая ($\alpha \leqslant 90^\circ$ и $\alpha > 90^\circ$), если за основание принять остроугольный треугольник, то один случай. Ответ: $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha}{\sqrt{2-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}}$.

7. Указание. Рассмотреть случаи, когда основание высоты пирамиды расположено на стороне равностороннего треугольника, внутри или вне его. Ответ:

$$V_1 = \frac{a^3}{8(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)},$$

$$V_2 = \frac{a^3}{8(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\gamma)},$$

$$V_3 = \frac{a^3}{8(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)},$$

$$V_4 = \frac{a^3}{8(-\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma)}.$$

8. 34956, 34056, 34452.

9. Указание. Числа такого вида получаются при нечетных показателях степени.

К статье «Телевидение готовит в вуз»

(см. «Квант» № 11, 1973)

Физика

4. $v_2 = r_2\sqrt{2g\dfrac{m_2r_2 - m_1r_1}{m_1r_1^2 + m_2r_2^2}} \approx 2{,}7$ *м/с*.

5. $$\cos\alpha = \frac{lk(3mg-F) + F(3mg-2F)}{2lkmg} = 0{,}35.$$

6. $h = \dfrac{k_1l_1}{1-k\operatorname{ctg}\alpha_1} \approx 4$ *м*,

$$l_2 = \frac{h}{k_2} - h\operatorname{ctg}\alpha_2 \approx 4{,}8 \text{ м}.$$

Математика

7. $$\sin^2(\alpha-\beta) - \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha-\beta) = \frac{1-\cos(2\alpha-2\beta)}{2} - \frac{1+\cos 2\beta}{2} + 2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) = -\cos\alpha\cos(\alpha-2\beta) + \cos\alpha\,[\cos\alpha + \cos(\alpha-2\beta)] = \cos^2\alpha.$$

8. $$\operatorname{tg}3x = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}2x}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x} = \frac{\operatorname{tg}x + \dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}}{1-\dfrac{2\operatorname{tg}^2x}{1-\operatorname{tg}^2x}} = \operatorname{tg}x\,\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}\,\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}x}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}x} = \operatorname{tg}x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right).$$

9. $$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}}{\sin\dfrac{\pi}{7}} = \frac{\sin\dfrac{8\pi}{7}}{8\sin\dfrac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}.$$

10. $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{5}}$. Решение. Пусть AD, BF — медианы, $OD = x$, $OF = y$ (рис. 1). Используя свойства медиан, из треугольников AOB, BOD, AOF находим

$$4x^2 + 4y^2 = c^2, \quad x^2 + 4y^2 = \frac{a^2}{4},$$

$$4x^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}.$$

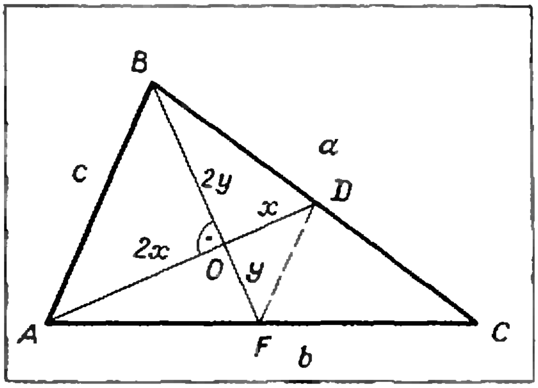


Рис. 1.

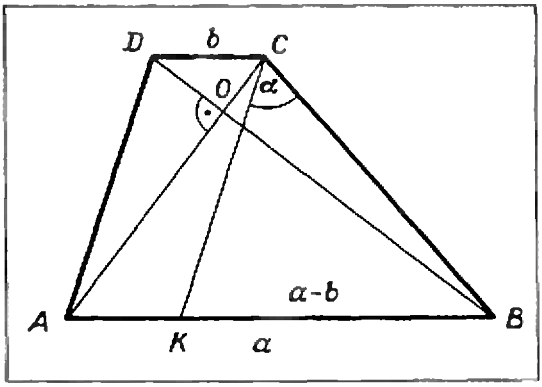


Рис. 2.

Исключая x и y, получаем $c^2=\frac{a^2+b^2}{5}$.

11. $\frac{4}{3}$. Указание. При решении полезно учесть, что $\triangle ABE \backsim \triangle KDE$, $\triangle AED \backsim \triangle BEF$.

12. $2\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$.

13. $\sin x$, если $a\cos x>0$; $-\sin x$, если $a\cos x<0$.

14. $h^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{4}$, если основания трапеции расположены по одну сторону от центра описанной окружности; $h^2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}$, если основания трапеции расположены по разные стороны от центра описанной окружности.

15. $\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{a-b}\,ab\operatorname{tg}\alpha$. Решение. Построим отрезок CK (рис. 2), параллельный стороне AD. Тогда $\measuredangle BCK=\alpha$. Пусть S — площадь трапеции, S_1 — площадь $\triangle BCK$, h — высота трапеции. Тогда

$$S=\frac{1}{2}(a+b)h=\frac{a+b}{a-b}S_1,$$

$$S_1=\frac{CK\cdot BC}{2}\sin\alpha.$$

По теореме косинусов:

$$BK^2=CK^2+BC^2-2CK\cdot BC\cos\alpha.$$

Учитывая, что $CK=AD$ и что треугольники AOD и BOC прямоугольные, получим

$$CK\cdot BC=\frac{AD^2+BC^2-BK^2}{2\cos\alpha}=$$

$$=\frac{AO^2+OD^2+OC^2+BO^2-BK^2}{2\cos\alpha}=$$

$$=\frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{2\cos\alpha}=\frac{ab}{\cos\alpha},$$

$$S_1=\frac{1}{2}ab\operatorname{tg}\alpha,$$

отсюда $S=\frac{1}{2}\,\frac{a+b}{a-b}\,ab\operatorname{tg}\alpha$.

16. $R\left(\sqrt{1-\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3}}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

Указание. Пусть CDE — правильный треугольник, $OF\perp AB$ (рис. 3). Рассмотреть $\triangle OCE$ и учесть, что $\measuredangle OCF=\measuredangle ACM=\frac{\pi}{3}$.

(см. «Квант» № 12, 1973)

Физика

1. $\Delta h=\frac{4m}{\pi d^2}\left(\frac{1}{\rho_в}-\frac{1}{\rho_{св}}\right)\approx 3{,}8$ *см*.

2. $p_h=\rho_в g(H-h)+$

$$+\rho_м g\frac{4V}{\pi\left(d_1^2+d_2^2\right)}\approx 2{,}7\cdot 10^3\ н/м^2.$$

3. $p=\frac{p_2V_2-0{,}5p_1V_1}{V_1+V_2}+$

$$+p_{нп}\approx 380\ мм\ рт.\ ст.$$

где $p_{нп}=20$ *мм рт. ст.* — давление насыщенного пара.

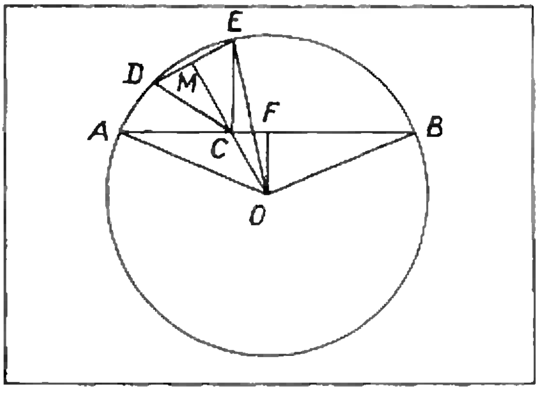


Рис. 3

Математика

1. Обозначим длины диагоналей параллелограмма через $2d_1$ и $2d_2$. Тогда площадь параллелограмма $S = 2d_1d_2 \sin\beta$. По теореме косинусов:

$$(3a)^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2\cos\beta,$$

$$a^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2\cos\beta,$$

откуда $2a^2 = d_1d_2\cos\beta$. Следовательно,

$$S = 2\frac{2a^2}{\cos\beta}\sin\beta = 4a^2 \operatorname{tg}\beta.$$

2. Площадь треугольника ABC равна

$$\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin 30^\circ = \frac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin 15^\circ + \frac{1}{2}BC\cdot BD\cdot\sin 15^\circ.$$

Отсюда $BD = \frac{6}{5\sin 15^\circ}$. Площадь треугольника ABD равна

$$\frac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin 15^\circ = \frac{12}{5}\ см^2.$$

3. $\frac{\pi}{4}$. Указание. Пусть CD — высота. Тогда $\Delta CDA = \Delta OBD$, откуда $BD = CD$.

4. $\frac{a\sin\alpha}{\cos 3\alpha}$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$;

$-\frac{a\sin\alpha}{\cos 3\alpha}$ при $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Указание. Прямая AO образует угол $\pm\left(3\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ с прямой BC.

К статье «Полигон логических структур»

1. См. рис. 4.

2. Схема автомата показана на рисунке 5. Здесь $A + B = S$ — числа, 2^0, 2^1 — разряды числа S.

3. См. рисунок 6. Здесь на входы A, B подаются по два сигнала (две двоичные цифры чисел), на выходе $S = A\times B$ получается четыре сигнала. Прямоугольники со знаком Σ — это сумматоры, схема которых приведена на рисунке 5.

4. См. рисунки 7, 8.

К задаче «Сколько треугольников?»

При $n = 7$ количество треугольников 11, при $n = 8$ количество треугольников 15.

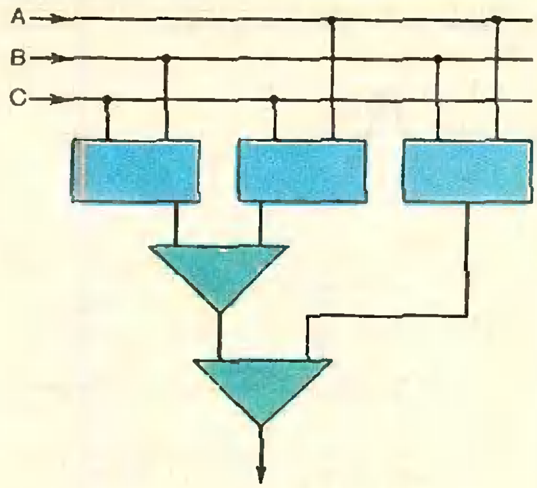


Рис. 4.

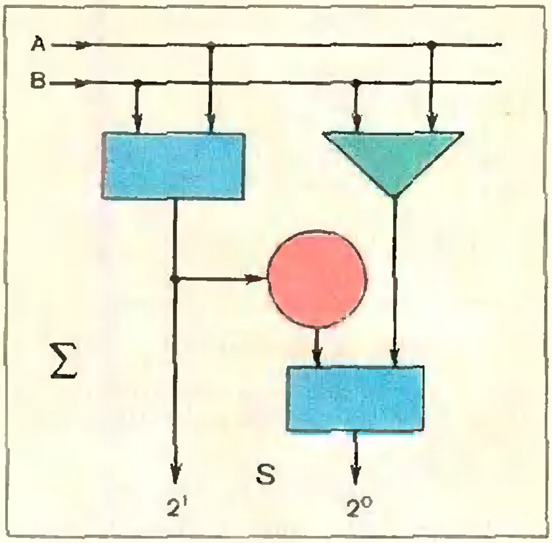


Рис. 5.

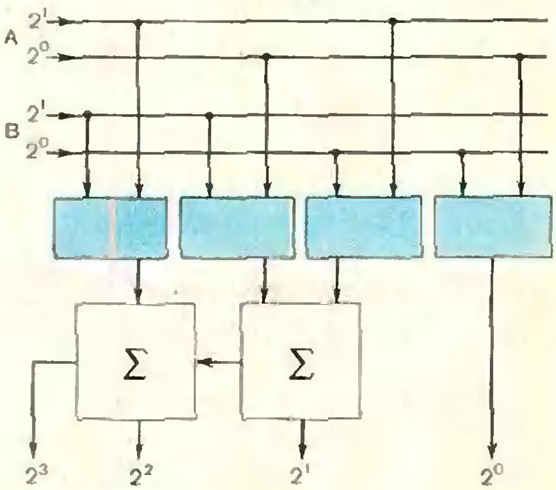


Рис. 6

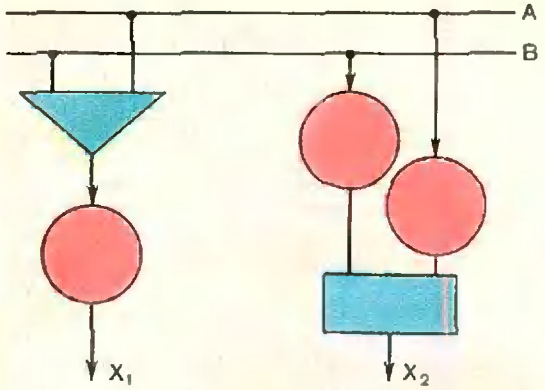


Рис. 7.

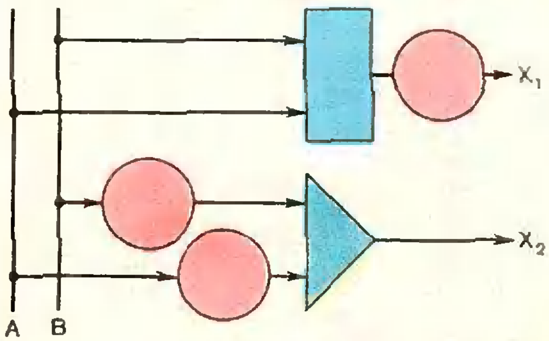


Рис. 8.

К задачам «Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 11, 1973)

1. Если направления вращения фигуристов совпадают, то 2,2 оборота в секунду; если не совпадают, то 1,8 оборота в секунду.
2. Чем меньше масса лодки, тем быстрее она «уходит из-под ног» прыгающего человека.
3. $a = 6$, $b = 5$, $g = 1$, $u = 2$, $л = 7$, $o = 8$, $y = 9$.
4. Противоречия никакого нет. Все дело в том, что соляной раствор имеет температуру замерзания ниже, чем чистая вода.
5. 40 лет, 30 лет.

(см. «Квант» № 12, 1973)

1. Шесть раз.
2. Темные тела поглощают большее количество тепловой энергии, чем светлые.
3. 9 $м^2$.
4. Размер дырочки увеличивается. (Лист расширяется так же, как если бы он был сплошным, без дырочки.)
5. Вере 5 лет, Боре — 8, Ане — 13, Гале — 15.
6. Нет. Сила mg уравновешена выталкивающей силой.

Напечатано в 1973 году

Задачник «Кванта»

Рецензии, библиография

Корректор *Т. С. Вайсберг*

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15,
«Квант», тел. 234-08-11. Сдано в набор 7/IX 1973 г
Подписано в печать 19/X 1973 г. Заказ 1762
Бумага 70×100 1/16 Физ. печ. л. 4 Усл. печ. л. 5,2
Уч.-изд. л. 5,98 Т-17600 Цена 30 коп.
Первый завод 340 000 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Уважаемый читатель!

Мы очень Вам благодарны, если Вы прислали ответы на вопросы нашей анкеты в прошлом году. Ваше участие в работе нашего журнала принесло редакции большую пользу. Однако, к сожалению, мы получили мало ответов на нашу анкету. Просим Вас, уважаемый читатель, найти время и ответить на вопросы редакции о работе журнала в 1973 году.

С тем, чтобы облегчить Вашу работу и упростить учет, отвечать предлагается кратко, заполняя пропуски или подчеркивая тот из предлагаемых ответов, который ближе других к Вашему мнению.

Мы будем очень Вам признательны, если Вы дополнительно к ответам на вопросы анкеты на отдельном листке письменно и развернуто выскажите свое мнение о журнале, а также Ваши пожелания редакции на 1974 год. Наш адрес: 117071, Москва В-71, Ленинский проспект 15, «Квант», «Анкета».

1. Фамилия, имя, отчество

....

2. Возраст

....

3. Школа, класс или профессия

....

4. Место жительства

5. Нравится ли Вам «Квант»: а) в целом б) с оговорками

в) не нравится

6. Какой из двух разделов журнала Вам больше нравится:

а) математика б) физика
в) одинаково — математика и физика

7. Понятны ли Вам условия и решения задач из раздела «Задачник «Кванта»:

Математика	Физика
а) да;	а) да;
б) нет	б) нет

8. Удается ли Вам справиться самостоятельно с задачами из раздела «Задачник «Кванта»:

Математика	Физика
а) да; б) иногда; в) нет	а) да; б) иногда; в) нет

9. Посильны ли для Вас статьи по математике, помещенные в «Кванте»:

а) да (какие)

....

б) отчасти (какие)

....

в) нет (какие)

....

10. Интересны ли Вам статьи по математике, помещенные в «Кванте»:

а) да (какие)

....

б) нет (какие)

....

11. Посильны ли для Вас статьи по физике, помещаемые в «Кванте»

а) да (какие)

....

б) отчасти (какие)

....

в) нет (какие)

....

12. Интересны ли Вам статьи по физике, помещенные в «Кванте»

а) да (какие)

....

б) нет (какие)

....

13. Помог ли Вам «Квант» получить более глубокое представление о математике или физике

а) да; б) нет

14. Считаете ли Вы полезными материалы раздела «Практикум абитуриента»

а) да (какие)

....

в) нет (какие)

....

15. Нужно ли расширять раздел журнала «Квант» для младших школьников»

а) да; б) нет

16. Довольны ли Вы оформлением журнала

а) да; б) отчасти; в) нет

17. Какие статьи Вы хотели бы видеть в журнале в 1974 году

а) по математике

....

б) по физике

....

УГОЛОК КОЛЛЕКЦИОНЕРА

ПЕРВАЯ РАКЕТА К МАРСУ

Марс — одна из наиболее интересных планет Солнечной системы. Именно с ним связывало человечество надежду на близкую встречу с другими разумными существами. Долгое время Марс задавал ученым загадку за загадкой. Тут и марсианские «каналы», которые в 1877 году впервые заметил итальянский астроном Скиапарелли, и гипотеза советского астрофизика И. С. Шкловского о том, что один из спутников Марса (Фобос) искусственный и многое другое. Однако длительные оптические исследования и даже радиоастрономические методы измерений не давали точных ответов на многочисленные вопросы, связанные с природой этой загадочной планеты.

Первый и очень важный шаг к исследованию Марса с помощью космических аппаратов, способных приближаться к нему на сравнительно небольшие расстояния, становиться его спутниками и доставлять на его поверхность научную аппаратуру, а, в будущем, и людей, был осуществлен в Советском Союзе. Одиннадцать лет тому назад, 1 ноября 1962 года, отправилась в длительный путь первая в мире межпланетная автоматическая станция «Марс-1». С тех пор ученые добыли огромное количество ценных научных данных о природе Марса. Прекрасные фотографии ряда участков поверхности Марса были получены американскими автоматическими станциями «Маринер». Советские межпланетные станции «Марс-2» и «Марс-3» превратились в искусственных спутников Марса. Успешно произведена мягкая посадка автоматической марсианской станции на поверхность планеты. Сейчас приближаются к Марсу автоматические станции «Марс-4» — «Марс-7».

В память о запуске первой межпланетной автоматической станции в ряде стран были выпущены специальные почтовые марки. Мы воспроизводим здесь марки СССР, Польши, Венгрии, Чехословакии, Монголии и Кубы, на которых изображена станция «Марс-1».

В. А. Лешковцев

Цена 30 коп.
ИНДЕКС 70465

12

На нижних рисунках даны три проекции моделей, сделанных из куска толстой проволоки. Эти модели не имеют накладывающихся (двойных) участков и скрепленных узлов. По заданным проекциям постройте наглядные изображения фигур (все эти фигуры вписываются в куб). Для примера на рисунке справа (вверху) построена в аксонометрической проекции одна из фигур.